Stochastik für Informatik, Vorlesung 2

Inhalt

- Wahrscheinlichkeitsraum, Wahrscheinlichkeitsmaß und Eigenschaften, Beispiele
- Laplace-Raum
- Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Lernziele

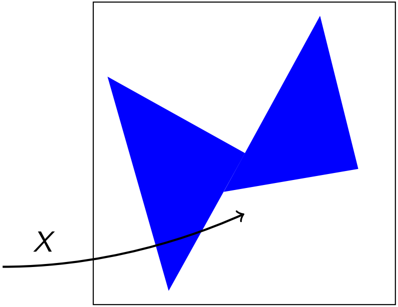
- Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen, und sie in elementaren Beispielen anwenden können
- Wahrscheinlichkeiten in Laplace-Räumen berechnen können
- Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten kennen
- Den Begriff Bedingte Wahrscheinlichkeit in einem Beispiel kennen

Benötigte Vorkenntnisse

- Begriffe und Notation für Mengen und Funktionen, z.B. aus AnNuMa, Vorkurs, Schule...

Letzte Vorlesung:

(Def. 1.1) Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang mit einem zufälligen oder (a priori) unbestimmten Ausgang.



(Def. 1.2) Ein möglicher Ausgang eines Zufallsexperiments ist ein Ergebnis. Die Menge aller Ergebnisse ist die Ergebnismenge Ω. Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ (ggf. mit gewissen günstigen Eigenschaften).

Letzte Vorlesung:

(Def. 1.3) Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$, bestehend aus

- Einer endlichen Ergebnismenge Ω
- Einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, mit den Eigenschaften
  (P0) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$.
  (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  (P2) Für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Notation: $\mathbb{P}(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$, für $\omega \in \Omega$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(Satz 1.1) Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Ergebnismenge Ω. Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann gelten

(P3) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(P4) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(P5) Für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ gilt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(P6) Für $A, B \subseteq \Omega$ gilt $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Modellierung von Wahrscheinlichkeiten

- (Beispiel 1.4: Zweifacher Münzwurf)

Laplace-Raum

(Def. 1.4) Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ heißt Laplace-Raum, falls für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gilt $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2)$, d.h. wenn jedes *Ergebnis* gleich wahrscheinlich ist.

Insbesondere gilt in Laplace-Räumen also $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$.

(Satz 1.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Laplace-Raum. Dann gilt für jedes $A \subseteq \Omega$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{“Anzahl günstiger Fälle”}}{\text{“Anzahl möglicher Fälle”}}.}$$

Für nicht-Laplace-Räume gilt diese Formel im Allgemeinen nicht!

- Beispiel 1.5
- Beispiel 1.6 Mehrfaches Würfeln

Laplace-Raum

(Def. 1.4) Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ heißt Laplace-Raum, falls für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gilt $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2)$, d.h. wenn jedes *Ergebnis* gleich wahrscheinlich ist.

Insbesondere gilt in Laplace-Räumen also $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$.

(Satz 1.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Laplace-Raum. Dann gilt für jedes $A \subseteq \Omega$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{“Anzahl günstiger Fälle”}}{\text{“Anzahl möglicher Fälle”}}.}$$

Für nicht-Laplace-Räume gilt diese Formel im Allgemeinen nicht!

- Beispiel 1.5
- Beispiel 1.6 Mehrfaches Würfeln

Komplexere Situationen

Begriff der Wahrscheinlichkeit in Anwendungen/im Alltag

- Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils
- Wahrscheinlichkeit für erfolgreichen mobilen Datenübertrag: Position, Intensität und Kapazität von Sendern und Empfängern
- Quantifizierung von Risiken
- Genetische Typen und ihre Mutationswahrscheinlichkeit
- etc.

Oft: kein Wahrscheinlichkeitsraum explizit bestimmbar. Stattdessen:

- Schätzen von Wahrscheinlichkeiten (Statistik) z.B. durch Beobachten von Häufigkeiten
- Annahmen über Verteilungen geeigneter Zufallsvariablen
- Verknüpfung grundlegender Modelle zu komplizierteren Situationen

Komplexere Situationen

Begriff der Wahrscheinlichkeit in Anwendungen/im Alltag

- Ausfallwahrscheinlichkeit eines Bauteils
- Wahrscheinlichkeit für erfolgreichen mobilen Datenübertrag: Position, Intensität und Kapazität von Sendern und Empfängern
- Quantifizierung von Risiken
- Genetische Typen und ihre Mutationswahrscheinlichkeit
- etc.

Oft: kein Wahrscheinlichkeitsraum explizit bestimmbar.
Stattdessen:

- Schätzen von Wahrscheinlichkeiten (Statistik) z.B. durch Beobachten von Häufigkeiten
- Annahmen über Verteilungen geeigneter Zufallsvariablen
- Verknüpfung grundlegender Modelle zu komplizierteren Situationen

Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

- Wiederhole ein Zufallsexperiment n mal, und beobachte jedes Mal, ob das Ereignis A eintritt, z.B. n-faches Würfeln mit einem Würfel, von dem wir nicht wissen ob er fair ist.
- Sei
$$H_n(A)$$
die Anzahl Wiederholungen (von den n Mal) in denen A eintritt, d.h. die absolute Häufigkeit, mit der A bei n Versuchen eintritt.
- Die Größe
$$h_n(A) := \frac{H_n(A)}{n}$$
heißt relative Häufigkeit des Auftretens von A in n Versuchen.

Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten

Intuition: Wenn n groß ist, so gilt $h_n(A) \approx \mathbb{P}(A)$, genauer:

$$\lim_{n \to \infty} h_n(A) = \mathbb{P}(A),$$

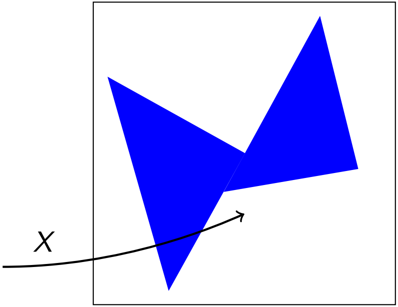
bzw.

$$h_n(A) \approx \mathbb{P}(A).$$

Relative Häufigkeit (aus Messungen) als Schätzer für die Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten

(Beispiel 1.2/1.9) Zufällige Auswahl von Punkten mittels Werfen eines Dartspfeils.



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{“Pfeil trifft blaues Gebiet”}\}) &= \frac{\text{Fläche des Gebiets}}{\text{Gesamtfläche}} \\ &\approx \frac{\text{Anzahl Treffer}}{\text{Anzahl Würfe}}\end{aligned}$$

Grundprinzip der Monte-Carlo-Simulation.

Finden eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \Omega \\ \boxed{\text{Zufällliger Vorgang}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

Bestimmung von Ω : Verschiedene Möglichkeiten, Modellierung.
Bestimmung von $\mathbb{P}$:

- Durch Erfahrung (Statistik)
- Durch theoretische Überlegungen wie Symmetrie, Zerlegung in Teilexperimente (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Grundprobleme bei Anwendungen

- Präzise Formulierung der Fragestellung unabdingbar
- Mathematische Formalisierung und Idealisierung der Wirklichkeit: Modellierung, Modellwahl
- Mathematische Theoreme gelten unter gewissen Voraussetzungen, sind diese erfüllt?
- Große Datenmengen – Rechenkapazität?

Finden eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes

$$\begin{tikzcd} & \Omega \\ \boxed{\text{Zufällliger Vorgang}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

Bestimmung von Ω : Verschiedene Möglichkeiten, Modellierung.
Bestimmung von $\mathbb{P}$:

- Durch Erfahrung (Statistik)
- Durch theoretische Überlegungen wie Symmetrie, Zerlegung in Teilexperimente (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Grundprobleme bei Anwendungen

- Präzise Formulierung der Fragestellung unabdingbar
- Mathematische Formalisierung und Idealisierung der Wirklichkeit: Modellierung, Modellwahl
- Mathematische Theoreme gelten unter gewissen Voraussetzungen, sind diese erfüllt?
- Große Datenmengen – Rechenkapazität?

Wichtige Grundmodelle

- (Beispiel 1.8: Urnenmodelle)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Beispiel 2.1) Würfeln mit einem fairen Würfel, $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Wir wissen:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = ... = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Nun würfeln wir verdeckt, und jemand sagt uns, dass die gewürfelte Zahl gerade ist.

Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten unter dieser Zusatzinformation?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Beispiel 2.1) Würfeln mit einem fairen Würfel, $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Wir wissen:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = ... = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Nun würfeln wir verdeckt, und jemand sagt uns, dass die gewürfelte Zahl gerade ist.

Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten unter dieser Zusatzinformation?

Es müssen neue Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\mathbb{P}}$ für die neue Situation bestimmt werden. Intuition, bzw. Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

und

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Def. 2.1) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für A gegeben B ist definiert als

$$\boxed{\mathbb{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

- Die Formel ist nicht symmetrisch, A und B haben unterschiedliche Rollen.
- (Beispiel 2.2: Würfeln unter Zusatzinformation)

Bedingte Wahrscheinlichkeit