Stochastik für Informatik, Vorlesung 5

Inhalt

- Bayes-Formel
- Zufallsvariablen, Verteilungen, Realisierungen
- Wichtige Verteilungen: Uniform, Bernoulli, Binomial
- Vorkommen dieser Verteilungen

Lernziele

- Mit den Begriffen Zufallsvariable, Verteilung und Verteilungsfunktion umgehen können
- Wichtige Beispiele von Verteilungen, ihre Charakteristika und ihr Auftreten kennen
- Wahrscheinlichkeiten für diese Verteilungen berechnen können

Vorkenntnisse

Stoff der bisherigen Vorlesungen, Funktionen, Summen und Reihen

Erinnerung: Bayes-Formel

Angenommen wir können $\mathbb{P}(A \mid B)$ (leicht) berechnen, interessieren uns aber eigentlich für $\mathbb{P}(B \mid A)$.

(Satz 2.3: Bayes-Umkehrformel) Seien A, B Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

frame

(Def. 2.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B heißen unabhängig, falls

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

gilt.

- Unabhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten von A nicht durch das Eintreten von B beeinflusst wird (und umgekehrt)
- (Satz 2.2) Zwei Ereignisse A und B auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ gilt.
- (Beispiel: Erdös-Renyi Zufallsgraph)

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

(Def. 3.1) Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar bestehend aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω, und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, welches jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ eine Zahl $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ zuordnet, und folgende Eigenschaften hat:

(P0) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$

(P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P2') Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \subset \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \cap A_m = \emptyset$ für alle Paare $n \neq m$ ist, gilt $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- (vgl. endlicher Wahrscheinlichkeitsraum: (P2) vs. (P2'))
- (Bem. allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum: genauso definiert)

Zufallsvariablen

(Def. 3.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine (eindimensionale) Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathbb{P})$ ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Der Wertebereich einer Zufallsvariablen X ist

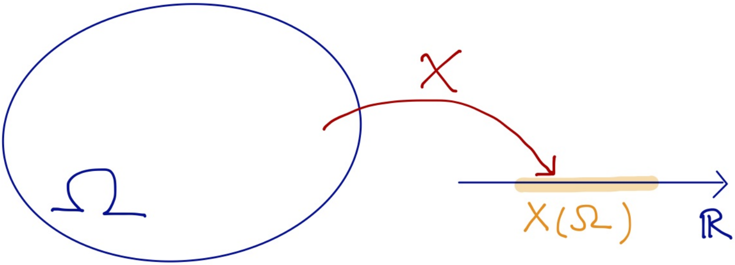
$$X(\Omega) := \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zufallsvariablen

(Def. 3.3) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wenn $X(\Omega)$ endlich oder abzählbar ist, so heißt X diskrete Zufallsvariable.
- Ein Zufallsvektor oder eine d-dimensionale Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^d, d \geq 1$. Die Koordinatenabbildungen sind dann eindimensionale Zufallsvariablen.

Zufallsvariablen: Schematische Skizze



Zufallsvariablen und Ereignisse

Notation: Für $E \subseteq X(\Omega)$ bzw. für $x \in X(\Omega)$ schreiben wir kurz

- $\{X \in E\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$
- $\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
- $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$
- etc.

Beachte: Dies sind alles Ereignisse, also Teilmengen von Ω.
Für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten schreiben wir

- $\mathbb{P}(X \in E) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\})$
- $\mathbb{P}(X \leq x) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega \leq x)\})$

- (Beispiel 3.1 Würfeln, 3.2 Wartezeiten)
- (Beispiel 3.3: Indikatorfunktion)
- (Beispiel 3.4: Funktionen von Zufallsvariablen)

Verteilungsfunktion

(Def. 3.6) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die (kumulative) Verteilungsfunktion F_X von X ist definiert als

$$\boxed{F_X : \mathbb{R} \to [0,1] : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).}$$

Diskrete Verteilung

(Def. 3.7) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Verteilung (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) p_X von X ist definiert als

$$\boxed{p_X : \mathbb{R} \to [0,1] : p_X(k) = \mathbb{P}(X = k),}$$

wobei $p_X(k) = 0$ für $k \notin X(\Omega)$.

- (Rechnen mit Verteilung und Verteilungsfunktion)
- (Beispiel 3.5: Summe beim zweifachen Würfeln)

Verteilung der Summe beim zweifachen Würfeln

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\omega : Z(\omega) = x$	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (3,1) (2,2)	(1,4) (4,1) (2,3) (1,4)	(1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3)	(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)	(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	(3,6) (6,3) (4,5) (5,4)	(4,6) (6,4) (5,5)	(5,6) (6,5)	(6,6)
$p_Z(x)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Beispiel: Diskrete Gleichverteilung

(Bsp. 3.6) Eine diskrete Zufallsvariable X heißt diskret gleichverteilt bzw. folgt einer diskreten Gleichverteilung, wenn $X(\Omega)$ endlich ist, und

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = y) \quad \text{für alle } x, y \in X(\Omega)$$

gilt, d.h. wenn jeder Wert gleich wahrscheinlich ist. Wir können dann immer annehmen dass $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, und

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in X(\Omega)}$$

ist.

- Dies entspricht eine Laplace-Raum
- Die Gleichverteilung nennt man auch uniforme Verteilung
- Beispiel: k-ter Wurf beim mehrfachen Würfeln
- (Konstruktion von beliebigen Verteilungen auf endlichen Mengen)

Beispiel 3.8: Gleichverteilung auf $[0, 1]$

Analog zur diskreten Gleichverteilung heißt eine Zufallsvariable X gleichverteilt, wenn jeder Wert von $X(\Omega)$ gleich wahrscheinlich ist.

Problem: Ist $X(\Omega)$ nicht endlich, so hat ein einzelner Wert damit Wahrscheinlichkeit 0.

(Def.) Eine Zufallsvariable X mit $X(\Omega) = [0, 1]$ heißt gleichverteilt (auf $[0, 1]$), wenn

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) = x \quad \text{für jedes } x \in [0, 1]}$$

gilt.

- (Interpretation)
- (Gleichverteilung auf beliebigen Intervallen)