Stochastik für die Informatik, Vorlesung 6

Inhalt

- Zufallsvariablen, Verteilungen, Realisierungen
- Wichtige Verteilungen: Uniform, Bernoulli, Binomial, Poisson
- Vorkommen dieser Verteilungen

Lernziele

- Mit den Begriffen Zufallsvariable, Verteilung und Verteilungsfunktion umgehen können
- Wichtige Beispiele von Verteilungen, ihre Charakteristika und ihr Auftreten kennen
- Wahrscheinlichkeiten für diese Verteilungen berechnen können

Vorkenntnisse

Stoff der bisherigen Vorlesungen, Funktionen, Summen und Reihen

Erinnerung: Zufallsvariable, Verteilung, Verteilungsfunktion

(Def. 3.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathbb{P})$ ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Der Wertebereichvon X ist

$$X(\Omega) := \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \subseteq \mathbb{R}.$$

(Def. 3.6) Die (kumulative) Verteilungsfunktion F_X von X ist definiert als

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

(Def. 3.7) Die Verteilung (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) p_X von X ist definiert als

$$p_X : \mathbb{R} \to [0, 1] : p_X(k) = \mathbb{P}(X = k),$$

wobei $p_X(k) = 0$ für $k \notin X(\Omega)$.

Beispiel: Diskrete Gleichverteilung

(Bsp. 3.6) Eine diskrete Zufallsvariable X heißt diskret gleichverteilt bzw. folgt einer diskreten Gleichverteilung, wenn $X(\Omega)$ endlich ist, und

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = y) \quad \text{für alle } x, y \in X(\Omega)$$

gilt, d.h. wenn jeder Wert gleich wahrscheinlich ist. Wir können dann immer annehmen dass $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, und

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in X(\Omega)}$$

ist.

- Die Gleichverteilung nennt man auch uniforme Verteilung
- Beispiel: k-ter Wurf beim mehrfachen Würfeln

Beispiel: Bernoulli-Verteilung

(Def. 3.8) Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, welches genau zwei mögliche Ausgänge hat.

- Die zwei möglichen Ausgänge bezeichnet man normalerweise mit 0 und 1 oder mit *Erfolg* und *Misserfolg*.
- $p = \mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(\text{“Erfolg”}) \in [0,1]$ ist die Erfolgswahrscheinlichkeit

(Def. 3.9) Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Bernoulli-verteilt zum Parameter $p \in [0,1]$ (bzw. hat die Bernoulli-Verteilung zum Parameter p), falls

$$\boxed{X(\Omega) = \{0,1\} \text{ und } \mathbb{P}(X = 1) = p}$$

gelten.
Notation: $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

(Beispiel: 3.11 Münzwurf, 3.12 Qualitätskontrolle)

Beispiel: Binomial-Verteilung

(Def. 3.10) Seien $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$. Eine Zufallsvariable X heißt binomialverteilt mit Parametern n und p falls gilt:
$X(\Omega) = \{0, ..., n\}$, und

$$\boxed{p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad , k = 0, ..., n.}$$

- p heißt auch Erfolgswahrscheinlichkeit
- (Erinnerung:) Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- (Satz 3.2) p_X ist tatsächlich eine Verteilung, denn es gilt $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$
- Notation: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Beispiel: Binomial-Verteilung

(Satz 3.3)[Binomialverteilung im wiederholten Bernoulli-Experiment] Ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n mal unter gleichbleibenden Bedingungen wiederholt. Sei X die Anzahl Erfolge. Dann ist X binomialverteilt mit Parameter n und p.

- Gleichbleibende Bedingungen: Die Ergebnisse der einzelnen Versuche sind unabhängig.
- (Beispiel 3.13: Urnenmodell)
- (Beispiel 3.14: Notation Indikatorfunktion)
- (Beispiel 3.15 Terminierung eines Algorithmus)
- (Beispiel 3.17 Erdős-Rényi-Zufallsgraph)

Binomialverteilung

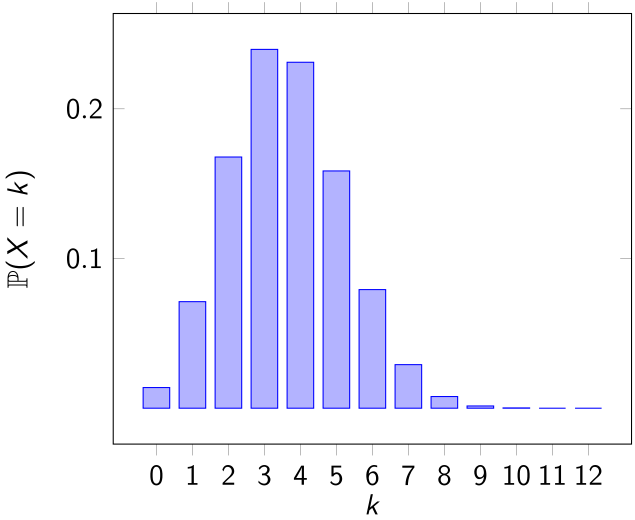

Abbildung: Binomialverteilung mit $n = 12, p = 0.3$

Binomialverteilung

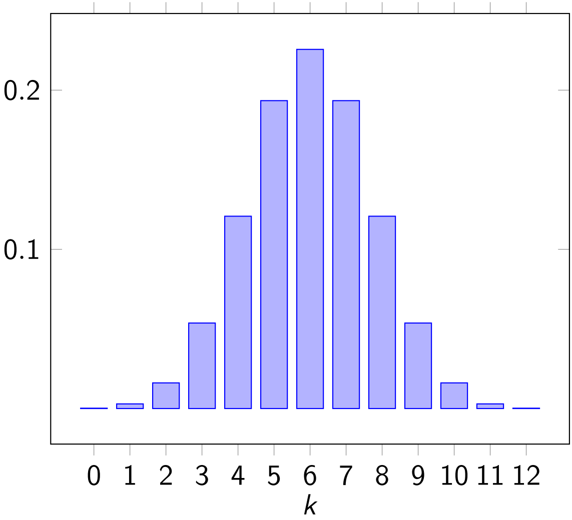

Abbildung: Binomialverteilung mit $n = 12, p = 0.5$

Beispiel: Geometrische Verteilung

(Def. 3.11) Sei $p \in [0,1]$ Eine Zufallsvariable X heißt geometrisch verteilt mit Parameter p falls gilt: $X(\Omega) = \mathbb{N}$, und

$$\boxed{p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.}$$

- Notation: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$
- Beispiel für einen abzählbaren Zustandsraum
- p_X ist tatsächlich eine Verteilung
- warum geometrisch?

Geometrische Verteilung

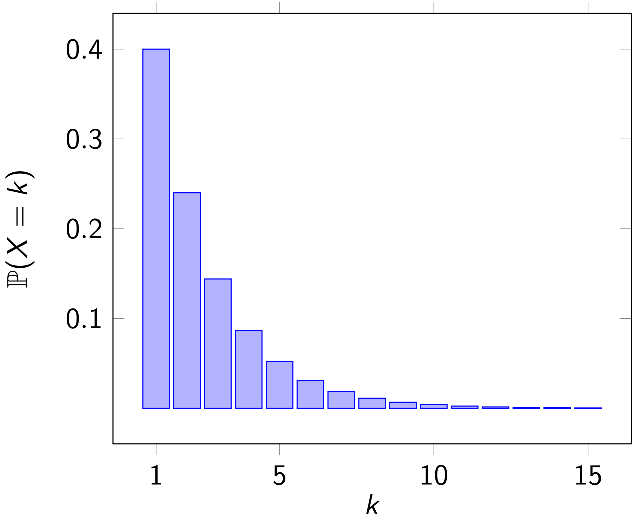

Abbildung: Geometrische Verteilung mit $p = 0.4$

Geometrische Verteilung

(Satz 3.4) Wir betrachten ein Bernoulli-Experiment mit Parameter p. Sei X die Anzahl Versuche die gemacht werden müssen, bis zum ersten Mal "Erfolg" eintritt. Dann ist X geometrisch verteilt mit Parameter p.

- (Beweis)
- (Beispiel: Würfeln)
- (Beispiel 3.18 Stochastischer Algorithmus)