Bsp. Münzwurf

$\Omega = \{K, Z\}$

$X = 1_{\{K\}}$ ist eine Zufallsvariable
Indikatorfkt. der Menge $\{K\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega = K \\ 0 & \omega = Z \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(K) = \begin{cases} 1/2 & \text{bei fairer Münze} \\ p & \text{allgemein} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1-p$

Bsp. Qualitätskontrolle

Aus N gleichartigen Produkten werden n zufällig ausgewählte getestet

$X_k := 1_{\{k\text{-ter Artikel fehlerhaft}\}}$

Falls alle dieser Produkte gleichwertig sind:

$\mathbb{P}(X_1=1) = \mathbb{P}(X_2=1) = \ldots = \mathbb{P}(X_n=1) = p$

$\mathbb{P}(X_k=0) = 1-p$

Jede dieser X_n ist Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

= Anzahl Möglichkeiten, k aus n Objekten auszuwählen, $1 \le k \le n$

$(0! = 1)$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

Beh. Die Binomialvert. ist tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. es gilt

i) $p_X(k) \ge 0 \quad \forall k = 0, \ldots, n$

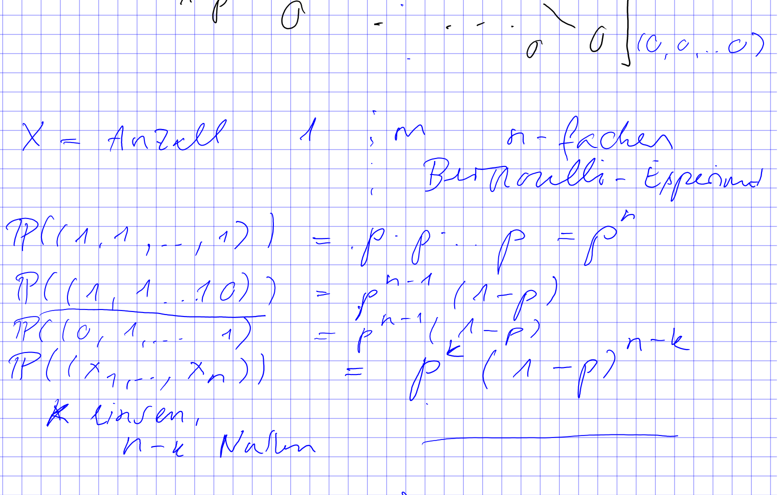
ii) $\sum_{k \in X(\Omega)} p_X(k) = 1$

Bew. i) $p_X(k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\ge 0} \underbrace{p^k}_{\ge 0} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\ge 0} \ge 0$

ii) $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{p}_{x}{}^k \underbrace{(1-p)}_{y}{}^{n-k}$

$\overset{\text{Binom. Lehrsatz}}{=} (p + (1-p))^n = 1^n = 1$ $\square$

Herleitung von Satz 3.17



X = Anzahl 1 im n-fachen Bernoulli-Experiment

$\mathbb{P}((1,1,\ldots,1)) = p \cdot p \cdots p = p^n$

$\mathbb{P}((1,1 \ldots 1\,0)) = p^{n-1}(1-p)$

$\mathbb{P}((0,1,\ldots 1)) = p^{n-1}(1-p)$

$\mathbb{P}((x_1,\ldots,x_n)) = p^k (1-p)^{n-k}$

k Einsen, $n-k$ Nullen

Bei solchen wiederholten Bernoulli-Experimenten sind die Ergebnisse der einzelnen Wiederholungen unabhängig

d.h. $\mathbb{P}$(1. Versuch Kopf und 2. Versuch Kopf)

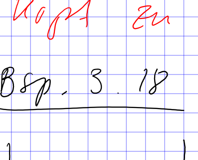
$= \mathbb{P}$(1. Versuch Kopf) $\cdot\ \mathbb{P}$(2. Versuch Kopf)

$= \mathbb{P}$(1. Vers. Kopf)^2

$= p^2$

also W. k Mal hintereinander Kopf zu werfen ist p^k

Bsp. 3.18 Urnenmodell



20 rote Kugeln
30 weiße Kugeln
ziehe 4x mit Zurücklegen

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_4) \quad \omega_i \in \{r, w\}\}$

X = Anzahl der weißen Kugeln

$$X(\omega) = \underbrace{1_{\{\omega_1 = w\}}}_{Y_1(\omega)} + \underbrace{1_{\{\omega_2 = w\}}}_{Y_2(\omega)} + \underbrace{1_{\{\omega_3 = w\}}}_{Y_3(\omega)} + \underbrace{1_{\{\omega_4 = w\}}}_{Y_4(\omega)}$$

jedes der Y_i ist Bernoulli-verteilt mit Parameter $p = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

X ist damit binomialverteilt mit Parameter $n = 4$ $\quad p = \frac{3}{5}$

$\mathbb{P}(X \ge 3) = \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4)$

$\mathbb{P}(X=3) = \binom{4}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^1$

$\mathbb{P}(X=4) = \binom{4}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \underbrace{\left(1 - \frac{3}{5}\right)^0}_{=1}$

Nützlicher Formalismus

bei Bernoulli-Experimenten

$Y_i = 1_{\{i\text{-tes Ergebnis Erfolg}\}}$

die Y_i sind Bernoulli-verteilt mit Parameter p

Anzahl Erfolge $\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} Y_i} = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{i\text{-tes Ergebnis Erfolg}\}}$

= Anzahl Erfolge in n-fachem Bernoulli-Experiment

also ist X binomialverteilt mit Parameter n und p.

Bsp. 3.15 Terminierung eines Algorithmus

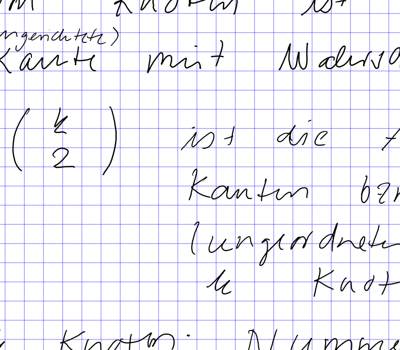
Algorithmus bricht mit Wahrsch. $p = 0.8$ ab

40x ausführen

Anzahl der Läufe bei denen der Algo. terminiert $\text{Bin}(40, 0.8)$

Bsp. Erdős-Rényi-Zufallsgraph

Zufälliger Graph, also ein zufälliges geometrisches Objekt bestehend aus Knoten und Kanten, wobei die Kanten jeweils 2 Knoten verbinden



Vorgegebene Anzahl k Knoten (= Punkte)

Bildungsregel: Zwischen jedem Paar von Knoten ist die "mögliche" (ungerichtete) Kante mit Wahrsch. p vorhanden

$\binom{k}{2}$ ist die Anzahl "möglicher" Kanten bzw. die Anzahl (ungeordneter) Paare aus k Knoten

k Knoten: Nummeriere die "möglichen" Kanten mit $l = 1, \ldots, \binom{k}{2}$

Zufallsvariablen:

$Y_l = 1_{\{\text{Kante nr. } l \text{ ist vorhanden}\}}$

Y_l ist Bernoulli-verteilt mit Parameter p

Die Ereignisse $\{\text{Kante } l \text{ vorhanden}\}$ $\{\text{Kante } m \text{ vorhanden}\}$ sind unabhängig

Anzahl vorhandener Kanten

$$= X = \sum_{l=1}^{\binom{k}{2}} Y_l \sim \text{Bin}\left(\binom{k}{2}, p\right)$$

in anderen Worten:

Anzahl der vorhandenen Kanten im Erdős-Rényi-Zufallsgraph ist binomialverteilt mit Parameter

$n = \binom{k}{2}$, p

wobei k = Anzahl Knoten

Geometrische Verteilung

Handelt sich tatsächlich um eine Verteilung

$$\sum_{X(\Omega)} p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p))^k$$

geometrische Reihe

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$