Stochastik für die Informatik, Vorlesung 13

Inhalt

- Zufallsvariablen mit Dichten
- Rechnen mit Dichten
- Exponentialverteilung

Lernziele

- Wichtige Beispiele für Dichten kennen
- Mit Dichten rechnen könnne

Vorkenntnisse Stoff der bisherigen Vorlesungen, insbesondere zum Thema Zufallsvariablen und Verteilungen, Integral- und Differentialrechnung

Erinnerung: Zufallsvariablen mit Dichten

(Def. 6.1) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Dann besitzt X bzw. F_X eine Dichte, falls eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Die Funktion f_X heißt dann Dichte von X bzw. von F_X.

(Satz 6.2) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann die Dichte einer Zufallsvariablen, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(i) $f(t) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Beispiel 6.3: Gleichverteilung

Seien $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

erfüllt die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.

Eine Zufallsvariable X mit dieser Verteilungsfunktion heißt (stetig) gleichverteilt oder uniform verteilt auf $[a, b]$.

Rechnungen mit Dichten

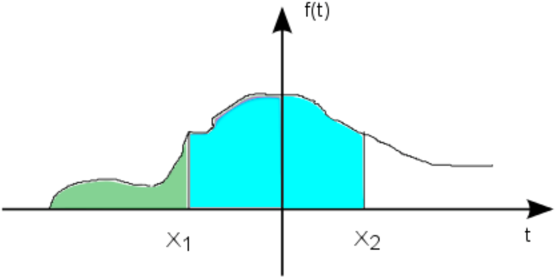
(Satz 6.3) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

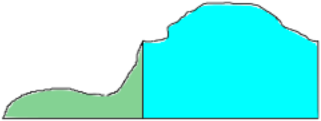
- $\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt$
- $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X > a) = \int_{a}^{\infty} f_X(t)dt$
- $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b[) = \int_{a}^{b} f_X(t)dt$

- (Beweis)
- $\mathbb{P}(X = a) = 0$

Rechnen mit Dichten

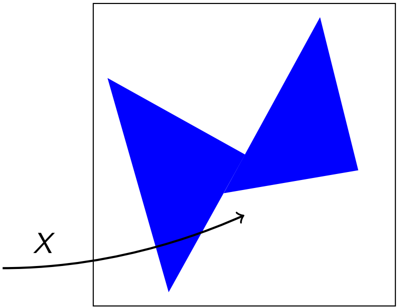
$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2)$ ist die Fläche unter der Dichte:



P(X≤X1) =  P(X≤X2) = 

$\mathbb{P}(X = a) = 0$

Die Wahrscheinlichkeit, einen einzelnen Punkt zu treffen, ist 0



Erwartungswert und Varianz

(Def. 6.2) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\boxed{\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) dt,}$$

falls das Integral exisitiert. Für eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] := \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t) dt,}$$

falls das Integral existiert. Die Varianz von X ist definiert als

$$\boxed{\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2],}$$

falls der Erwartungswert existiert.

- (Bem. Satz 6.4 $\mathbb{E}[g(X)]$)
- (Beispiele)

Erwartungswert und Varianz

(Satz 6.4) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Für die Varianz (falls sie existiert) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t) dt - (\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) dt)^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

- (Beweis)
- (Beispiel 6.4)

Beispiel: Exponentialverteilung

(Def 6.3). Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls X die Dichte f_X hat, mit

$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

- (Überprüfe dass das eine Dichte ist)
- Notation: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Beispiel: Exponentialverteilung

(Satz 6.5). Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann ist die Verteilungsfunktion F_X gegeben durch

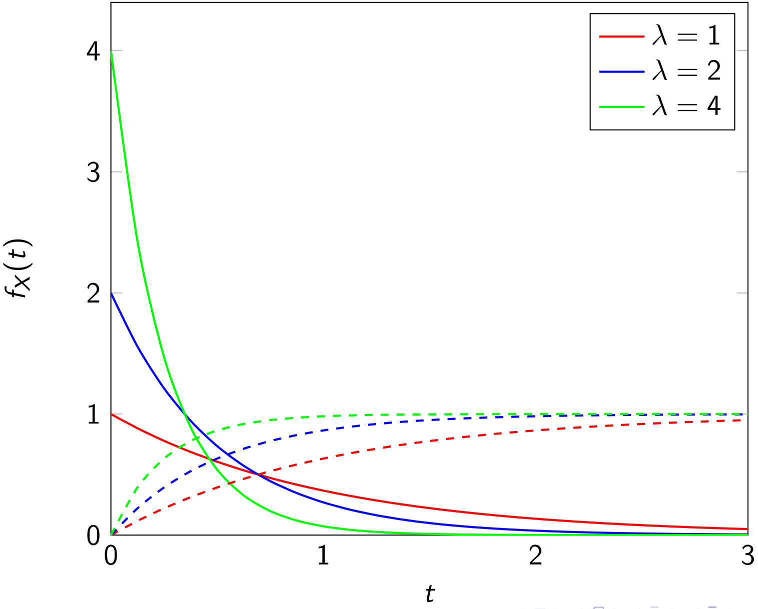
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

und es gelten

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- (Beweis)

Exponentialverteilung: Dichte und Verteilungsfunktion



Auftreten der Exponentialverteilung

- Stetiges Analog zur geometrischen Verteilung
- (Konvergenz der geometrischen Verteilung)
- Wartezeiten bis zum Eintreten eines (seltenen) Ereignisses:
  - Radioaktiver Zerfall
  - Wartezeiten zwischen zwei Anfragen im Callcenter
  - Restlebenszeit eines Bauteils mit konstanter Ausfallrate
  - Zeit zwischen zwei Mutationen auf einem Stück DNA
- Charakteristische Eigenschaft: Gedächtnislosigkeit

Wichtige Beispiele: Pareto-Verteilung

(Def.) Eine Zufallsvariable X heißt Pareto-verteilt mit Parametern $\alpha > 0, x_m > 0$ falls X Dichte f_X hat mit

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_m \\ \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_m. \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha$
- Der Erwartungswert existiert falls $\alpha > 1$ ist. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_m$.
- Die Varianz existiert falls $\alpha > 2$ ist. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} x_m^2$.
- Auftreten: Wachstumsprozesse
- Diskrete Version: Zipf-Verteilung

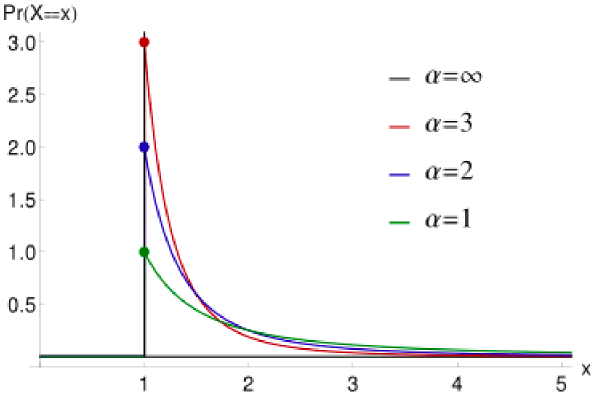
Wichtige Beispiele: Pareto-Verteilung

(Def.) Eine Zufallsvariable X heißt Pareto-verteilt mit Parametern $\alpha > 0, x_m > 0$ falls X Dichte f_X hat mit

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_m \\ \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq x_m. \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha$
- Der Erwartungswert existiert falls $\alpha > 1$ ist. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_m$.
- Die Varianz existiert falls $\alpha > 2$ ist. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} x_m^2$.
- Auftreten: Wachstumsprozesse
- Diskrete Version: Zipf-Verteilung

Pareto-Verteilung: Dichte



Pareto-Verteilung: Verteilungsfunktion