Rechnen mit Dichten:

- Verteilungsfkt: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$
- f_X Dichte zu F_X: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ $\quad \| \quad \mathbb{P}(X \leq x)$

$$\mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < b)$$

$$\mathbb{P}(X < b) = \lim_{h \searrow 0} \mathbb{P}(X \leq b-h)$$

$$\underset{\text{Def. Dichte}}{=} \lim_{h \searrow 0} \int_{-\infty}^{b-h} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt = \mathbb{P}(X \leq b)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \mathbb{P}(X < a)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{a}^{\infty} f_X(t)\,dt = \mathbb{P}(X > a)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

$$= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$$

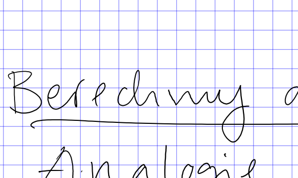
$$= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt$$

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

Gleichverteilung auf $[0,1]$ $\quad$ Bsp. 6.3 mit $a=0$, $b=1$

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$



$a \in \mathbb{R}$

$0 < a < 1$

$$\mathbb{P}(X > a) \left(= 1 - \overbrace{\mathbb{P}(X \leq a)}^{\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt} \right)$$

$$= \int_{a}^{\infty} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{a}^{1} 1\,dt$$

$$= 1 - a$$

$\mathbb{P}(X \leq a) = a$

Berechnung des Erwartungswerts:

Analogie diskret <-> Dichte

X diskret,	X Dichte
$k \in X(\Omega)$ diskret	$t \in \mathbb{R}$
$\mathbb{P}(X=k)$, Verteilung	$f_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ Dichte
Erwartungswert	Erwartungswert
$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$

in Analogie entspricht $f_X(t)\,dt$ der infinitesimalen Wahrsch. für „$X = t$"

Zur Definition der Varianz

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\left(X - \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\,dt\right)^2}_{g(X)}\Big]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(t - \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\,dt\right)^2 \Big]$$

$$= \ldots = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Bsp. zum Erwartungswert

X habe Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t^3 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(letztes Mal gesehen, dass das tatsächlich eine Dichte ist)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} t \cdot f_X(t)\,dt + \int_{0}^{2} t \cdot f_X(t)\,dt + \int_{2}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} t \cdot f_X(t)\,dt + 0$$

$$= \int_{0}^{2} t \cdot \frac{1}{4} t^3\,dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{0}^{2} t^4\,dt = \left[\frac{1}{4} \frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{20}(2^5 - 0) = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{2} t^2 \frac{1}{4} t^3\,dt = \left[\frac{1}{4} \frac{t^6}{6}\right]_{t=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{24} \cdot 64 = \frac{8}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$= \ldots$$

Exponentialverteilung

$\lambda > 0$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Ist tatsächlich eine Dichte, denn

i) $f_\lambda(t) \geq 0$ ✓

ii) z.z. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(t)\,dt = 1$

Wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_\lambda(t)}_{0}\,dt + \int_{0}^{\infty} f_\lambda(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \underbrace{(-\lambda)}_{} \cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

↳ innere Ableitung von $e^{-\lambda t}$

$$\left[(e^{-\lambda t})' = e^{-\lambda t} \cdot \underbrace{(-\lambda)}_{\text{innere Ableitung}} \right]$$

$$= -\left[e^{-\lambda t}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= -\underbrace{\lim_{t \to \infty} e^{-\lambda t}}_{=0} + e^{-\lambda \cdot 0}$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Verteilungsfunktion:

$$F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \int_{0}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ -e^{-\lambda x} + \underbrace{e^{-\lambda 0}}_{1} = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_\lambda(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t \cdot 0\,dt}_{=0} + \int_{0}^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} (\lambda t) \cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \underset{\text{Partielle Integration}}{\ldots} = \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

Erinnerung: Erwartungswert der geometrischen Verteilung mit Parameter p war $\frac{1}{p}$

Geometrische Verteilung und Exponentialverteilung sind hier analog.

Man kann zeigen, dass die Exponentialverteilung als Grenzwert von geometrischen Verteilungen auftritt in folgendem Sinne: Seien

$$X_n \sim \mathrm{Geo}(p_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $\lim_{n \to \infty} n \cdot p_n = \lambda$ $\quad$ (also $p_n \approx \frac{\lambda}{n}$)

Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) \overset{\text{Übungsaufgabe}}{=} 1 - e^{-\lambda x}$$

$$= F_\lambda(x)$$

$$= \mathbb{P}(Y \leq x)$$

wenn $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$