Dichte der Standardnormalverteilung: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

$$\boxed{f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Zusammenhang Dichte und Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Im Falle der (Standard-)normalverteilung

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}$$

$$\boxed{=: \Phi_{0,1}(x)}$$

Notation für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Funktionswerte sind in Tabellen dargestellt.

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

Muss nachprüfen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1$$

dies kann mit Hilfe von etwas Analysis gezeigt werden.

Standardisierung:

Beweis von Satz 6.7

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right) = \mathbb{P}(X \leq \sigma \cdot y + \mu)$$

Verteilungsfkt. von Y an der Stelle y

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\sigma y + \mu} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{y} \sigma\, e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$$

Substitution: $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$ $\quad \sigma = \frac{ds}{dt}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-s^2/2}\,ds = \Phi_{0,1}(y)$$

$ds = \frac{ds}{dt}\,dt = \frac{1}{\sigma}\,dt$

$dt = \sigma\,ds$

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sigma}$

Rechenbeispiel Bsp. 6.6

$X \sim \mathcal{N}(\underbrace{-1{,}3}_{=\mu}, \underbrace{4}_{\sigma^2})$

Frage: $\mathbb{P}(X > 0)$

$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(0)$

mit $\mu = -1.3$, $\sigma^2 = 4$

Verwende Standardisierung, um $\Phi_{\mu,\sigma}$ auf $\Phi_{0,1}$ zu transformieren.

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Y \sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{0-\mu}{\sigma}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{0-(-1.3)}{\sqrt{4}}\right) = \mathbb{P}(Y \leq 0.65)$$

$$= \Phi_{0,1}(0.65)$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \Phi_{0,1}(0.65)$$

$$= 1 - 0{,}7422$$

Tabelle $= 0{,}2578$

Bsp. 6.7 $\quad X \sim \mathcal{N}(\underbrace{-1.3}_{\mu}, \underbrace{4}_{\sigma^2})$

$$\mathbb{P}(X > -2) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(-2)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \leq -2)$$

Standardisierung

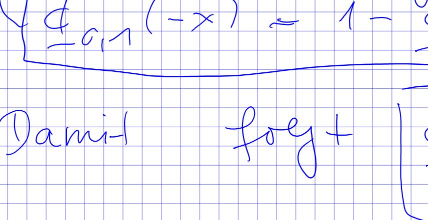
$$\overset{!}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-(-1.3)}{2} \leq \underbrace{-0.35}_{= \frac{-2+1.3}{2}}\right)$$

$$= 1 - \Phi_{0,1}(-0.35)$$

Problem: In der Tabelle sind nur Werte für $x \geq 0$ vermerkt.

Lösung des Problems:

Symmetrie der Standardnormalverteilung:



Dichte der Standardnormalverteilung erfüllt

$$\boxed{\varphi_{0,1}(-x) = \varphi_{0,1}(x)}$$

Nicht die Verteilungsfkt. ist symmetrisch, nur die Dichte.

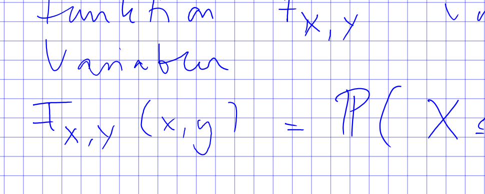
Für die Verteilungsfkt. gilt:

$$\boxed{\Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)}$$

Damit folgt $\boxed{\Phi_{0,1}(-0.35) = 1 - \Phi_{0,1}(0.35)}$

$$\mathbb{P}(X > -2) = 1 - \Phi_{0,1}(-0.35)$$
$$= 1 - (1 - \Phi_{0,1}(0.35))$$
$$= \Phi(0.35) = 0.6368$$

Warnung: $\boxed{\Phi_{\mu,\sigma^2}(-x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(x)}$ gilt nur dann, wenn $\mu = 0$ ist.



Bemerkung: Die gemeinsame Verteilungsfunktion zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als Funktion $F_{X,Y}$ von zwei Variablen

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Begriff der gemeinsamen Dichte vgl. Buch

Bem. Sind X, Y unabhängige ZV mit f_X, f_Y, dann gilt die Faltungsformel:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \cdot f_Y(z-t)\,dt$$

Covarianz von 2 beliebigen ZV X, Y ist definiert als

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Bsp. 6.8

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathbb{E}[X] = \mu$, $\quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$

Standardabweichung σ

Mit Hilfe der Standardisierung $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ berechnet man

$$\mathbb{P}(X \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma])$$
$$= \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$

Standard $\frac{X-\mu}{\sigma}$

$$= \mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 1)$$

$$= \Phi_{0,1}(1) - \Phi_{0,1}(-1)$$

$\Phi_{0,1}(-1) = 1 - \Phi_{0,1}(1)$

$$= 2\,\Phi_{0,1}(1) - 1 \approx 0{,}6827$$
$$\approx 0.68$$

das heißt: Bei einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen $\approx 68\%$ der Werte innerhalb einer Standardabweichung um den Erwartungswert

$$\mathbb{P}(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}9545$$

d.h. $\approx 95\%$ der Werte liegen innerhalb von $\mu \pm 2\sigma$
