Formale Formulierung des Gesetzes der großen Zahlen

(Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

<u>Satz</u> $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{V}(X_1)<\infty$.

Dann gilt

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\overbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}^{=S_n}-\mathbb{E}[X_1]\Big|\geq\varepsilon\Big)}=0$$

$\forall\varepsilon>0$

d.h. $$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[X_1]}$$

<u>Beweis</u>

$$S_n:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ das empirische Mittel von $X_1,\dots,X_n$

$$\underline{Y=Y_n}:=S_n-\mathbb{E}[S_n]$$
$$=S_n-\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big]=$$
$$=S_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{=\mathbb{E}[X_1]}$$
$$=S_n-\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mathbb{E}[X_1]$$
$$=\underline{S_n-\mathbb{E}[X_1]}$$

$$\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mathbb{E}[X_1]\Big)$$
$$=\frac{1}{n^2}\mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)$$

Rechenregeln für die Varianz

X_i unabh.

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{V}(X_i)}_{=\mathbb{V}(X_1)}$$
$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\mathbb{V}(X_1)=\underline{\frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1)}.$$

Chebyshev-Ungleichung:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(|S_n-\underbrace{\mathbb{E}[S_n]}_{=\mathbb{E}[X_1]}|>\varepsilon\big)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\cdot\varepsilon^2}=0$$

□

Approximation mit dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\approx Y$$ $\sim$ Standardnormalverteilt

$$=\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\underset{\mathbb{E}[X_1]}{\overset{\shortparallel}{\mu}})$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\approx\sqrt{n}\cdot\sigma\cdot Y$$
$$\shortparallel$$
$$\sum_{i=1}^{n}X_i-n\cdot\mathbb{E}[X_1]$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i\approx n\cdot\mathbb{E}[X_1]+\sqrt{n}\cdot\sigma\cdot Y}$$

Y Standardnormalverteilt

<u>Bsp. 7.2</u>

$$Z\sim\mathrm{Bin}(\underset{n}{\overset{\shortparallel}{90}},\underset{p}{\overset{\shortparallel}{1/3}})$$ $\mathbb{E}[Z]=n\cdot p=30$.

$$\mathbb{P}(Z\in[25,30])$$
$$\approx\Phi_{0,1}\left(\frac{30+1/2-90\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right)$$
$$-\Phi_{0,1}\left(\frac{25-1/2-90\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right)$$
$$\approx\Phi_{0,1}(0.11)-\underbrace{\Phi_{0,1}(-1.23)}_{\text{Symmetrie}}$$
$$=\dots=\underline{0{,}4345}$$

<u>Bemerkung:</u>

Wir kennen bereits zwei verschiedene Approximationen der Binomialverteilung:

1) Normalapproximation/Zentraler Grenzwertsatz:

$$\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathcal{N}(0,1)$$ standardnormal

$X_n\sim\mathrm{Bin}(n,p)$

2) Poisson-Grenzwertsatz

$$X_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{Poi}(\lambda)$$ Poisson,

falls $X_n\sim\mathrm{Bin}(n,p_n)$ mit

$$n\cdot\underbrace{p_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda$$

also $p\to0$.