Stochastik für die Informatik, Vorlesung 19

Inhalt

- Konfidenzbereiche
- t-Verteilung und χ^2-Verteilung
- Weitere Beispiele für Konfidenzbereiche

Lernziele

- Konfidenzbereiche in wichtigen Beispielen berechnen können
- Die t-Verteilung und die χ^2-Verteilung sowie deren Auftreten kennen

Vorkenntnisse Parameterschätzung, Verteilungen, Konfidenzbereiche, Normalverteilung

Kapitel 9: Konfidenzbereiche

Grundproblem: Gegeben $x_1, ..., x_n$ als Realisierungen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$, deren Verteilung von einem unbekannten Parameter θ abhängig ist.

Notation: $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ die Menge aller theoretisch möglicher θ

Letztes Mal: Schätzer $\theta_n(x_1, ..., x_n)$ als Realisierung einer Schätzfunktion θ_n. Damit θ_n ein (guter) Schätzer für θ ist, sollte $\theta_n \approx \theta$ gelten. Genauigkeit?

Ziel: Die Wahrscheinlichkeit dass das berechnete θ_n stark vom echten θ abweicht soll klein sein.

Idee: Suche eine (zufällige) Menge $J \subset \Theta$, welche den richtigen Wert θ mit hinreichend großer Wahrscheinlichkeit enthält.

Konfidenzbereiche

(Def. 9.1) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, deren Verteilung von einem Parameter $\theta \in \Theta$ abhängt. Sei $\alpha \in (0,1)$ vorgeben. Ein Konfidenzbereich für den Parameter θ zum Fehlerniveau α ist eine Menge $J = J(X_1, ..., X_n)$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta(J \ni \theta) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes } \theta \in \Theta$$

gilt. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_\theta$ die Wahrscheinlichkeit unter dem Parameterwert θ.

- J ist zufällig, nicht θ (!)
- J ist unabhängig von θ
- Typische Werte für das Fehlerniveau α sind $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$
- J sollte so klein wie möglich sein, in Abhängigkeit von α.
- Oft: J Konfidenzintervall. Bestimmung: Quantilmethode
- Beispiel 9.1

Konfidenzbereiche

(Def. 9.1) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, deren Verteilung von einem Parameter $\theta \in \Theta$ abhängt. Sei $\alpha \in (0, 1)$ vorgeben. Ein Konfidenzbereich für den Parameter θ zum Fehlerniveau α ist eine Menge $J = J(X_1, ..., X_n)$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta(J \ni \theta) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes } \theta \in \Theta$$

gilt. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_\theta$ die Wahrscheinlichkeit unter dem Parameterwert θ.

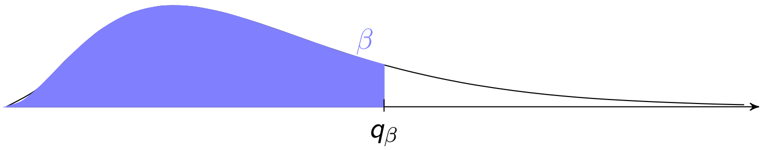
- J ist zufällig, nicht θ (!)
- J ist unabhängig von θ
- Typische Werte für das Fehlerniveau α sind $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$
- J sollte so klein wie möglich sein, in Abhängigkeit von α.
- Oft: J Konfidenzintervall. Bestimmung: Quantilmethode
- Beispiel 9.1

Quantile

(Def. 9.2) Sei $\beta \in [0,1]$, und sei Y eine Zufallsvariable mit bekannter Verteilungsfunktion F. Das Quantil der Verteilung von Y zum Niveau β ist die kleinste Zahl q_β, für die gilt

$$F_Y(q_\beta) = \mathbb{P}(Y \leq q_\beta) \geq \beta.$$

- Quantile wichtiger Verteilungen werden in Tabellen angegeben. R-Befehle: `qnorm, qbinom...`
- Notation: $q_{\theta,\beta}$ falls die Verteilung von Y von einem Parameter θ abhängt.

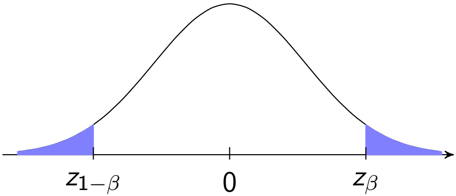


Quantile der Normalverteilung

Tabelle: $\mathbb{P}(X \leq z_\beta) = \beta$, für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, bzw. $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

β	0.9	0.95	0.96	0.975	0.98	0.99
z_β	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326

Außerdem gilt $z_{1-\beta} = -z_\beta$



Faustregeln für normalverteilte Messungen:

- 90 % aller Messwerte liegen im Bereich $\mu \pm 1,645\sigma$
- 95 % aller Messwerte liegen im Bereich $\mu \pm 1,960\sigma$
- 99 % aller Messwerte liegen im Bereich $\mu \pm 2,576\sigma$

Konstruktion von Konfidenzbereichen: Quantilmethode

Grundidee für $n = 1$:
Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung Parameter $\theta \in \Theta$ hat.
Gesucht: Zufällige Teilmenge $J(X) \subset \Theta$, so dass für jedes $x \in X(\Omega)$ gilt: Für $\theta \in J(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, den Wert x zu beobachten, hinreichend groß.

Begründung: Wird die Realisierung x beobachtet, so liegt der echte Parameter θ mit hoher Wahrscheinlichkeit in $J(x)$. Andernfalls wäre es sehr unwahrscheinlich, dass x gemessen würde.

“Hinreichend groß” kann man mit Hilfe des Quantilbegriffs quantifizieren:

- Für großes β ist $\mathbb{P}(X \leq q_{\theta,\beta})$ groß
- Für kleines β ist $\mathbb{P}(X \geq q_{\theta,\beta})$ groß

Konstruktion von Konfidenzbereichen: Quantilmethode

Sei X eine stetige Zufallsvariable, deren Verteilung von $\theta \in \Theta$ abhängt, und sei $\alpha \in]0,1[$. Sei x eine Realisierung von X. Der obere Konfidenzbereich zum Niveau α ist gegeben durch

$$J(x) = \{\theta \in \Theta : x \leq q_{\theta,1-\alpha}\}$$

Der untere Konfidenzbereich zum Niveau α ist gegeben durch

$$J(x) = \{\theta \in \Theta : x \geq q_{\theta,\alpha}\}$$

Der beidseitige Konfidenzbereich zum Niveau α ist gegeben durch

$$J(x) = \{\theta \in \Theta : q_{\theta,\alpha/2} \leq x \leq q_{\theta,1-\alpha/2}\}$$

- Es folgt aus den Definitionen, dass jeder dieser Bereiche ein Konfidenzbereich zum Niveau α ist (Beweis).
- Interpretation: Wird x beobachtet, so sind alle $\theta \in J(x)$ plausible Parameter, bzw. umgekehrt: Für $\theta \in J(x)$ ist es wahrscheinlich, x zu beobachten.
- (Beispiel: $n = 1, X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$)

Konfidenzbereiche und Akzeptanzbereiche

Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung von $\theta \in \Theta$ abhängt, und sei $\alpha \in]0,1[$. Sei x eine Realisierung von X. Zu jedem Konfidenzbereich $J(x) \subset \Theta$ gehört ein Akzeptanzbereich $A(\theta) \subset \mathbb{R}$, so dass gilt

$$x \in A(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in J(x).$$

- Falls J ein Konfidenzbereich für θ zum Fehlerniveau α ist, gilt also
$$\mathbb{P}_\theta(x \in A(\theta)) \geq 1 - \alpha.$$
- Zu den Konfidenzbereichen der vorigen Folien gehören also jeweils die Akzeptanzbereiche
  - $A(\theta) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq q_{p,1-\alpha}\}$,
  - $A(\theta) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq q_{p,\alpha}\}$,
  - $A(\theta) = \{x \in \mathbb{R} : q_{p,\alpha/2} \leq x \leq q_{p,1-\alpha/2}\}$
- (Skizze)

Konfidenzbereiche: Normalverteilung

Beispiel 9.3: Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung bei bekannter Varianz

Gegeben: Daten $x_1, ..., x_n$ als Realisierungen von $X_1, ..., X_n$, wobei die X_i unabhängig sind und einer Normalverteilung mit bekanntem σ^2 und unbekanntem μ folgen.

Gesucht: Konfidenzintervall J für μ zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$, d.h. gesucht $J \subset \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbb{P}_\mu(J \ni \mu) \geq 1 - \alpha = 0.95$$

Beispiel 9.3 (Fortzetzung)

Ansatz für das Konfidenzintervall:

$$J = [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h],$$

wobei $\bar{\mu}_n = \bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n)$ das empirische Mittel ist.

Zu bestimmen also $h = h(\alpha, n, \sigma^2)$ so dass die gewünschte Genauigkeit erreicht wird.

Ergebnis: Man findet

$$\mathbb{P}_\mu(\mu \in [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h]) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y \geq \frac{\sqrt{n}h}{\sigma}) \leq \frac{\alpha}{2},$$

wobei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Beispiel 9.3 (Fortzetzung)

Ansatz für das Konfidenzintervall:

$$J = [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h],$$

wobei $\bar{\mu}_n = \bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n)$ das empirische Mittel ist.

Zu bestimmen also $h = h(\alpha, n, \sigma^2)$ so dass die gewünschte Genauigkeit erreicht wird.

Ergebnis: Man findet

$$\mathbb{P}_\mu(\mu \in [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h]) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y \geq \frac{\sqrt{n}h}{\sigma}) \leq \frac{\alpha}{2},$$

wobei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Konfidenzbereiche: Erwartungswert Normalverteilung

(Satz 9.1) Ein Konfidenzintervall zum Fehlerniveau α für den Erwartungswert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 und n unabhängigen Messungen ist gegeben durch

$$J = J(n, \alpha, \sigma) = [\bar{\mu}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\mu}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

wobei $z_{1-\alpha/2}$ das Quantil der Normalverteilung ist, und $\bar{\mu}_n$ das empirische Mittel.

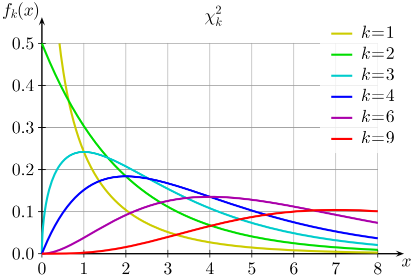
- Herleitung aus dem Ansatz: J ist symmetrisches Intervall um den klassischen Schätzer μ_n
- Dieser Ansatz kann auch für andere Problemstellungen verwendet werden (Satz 9.2 im Skript).
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ist hier der sogenannte Standardfehler des Schätzers $\bar{\mu}_n$.

χ^2-Verteilung

(Def. 9.3) Eine Zufallsvariable X ist χ^2-verteilt, bzw. folgt einer χ^2-Verteilung mit Parameter $n \in \mathbb{N}$, wenn sie die Dichte

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

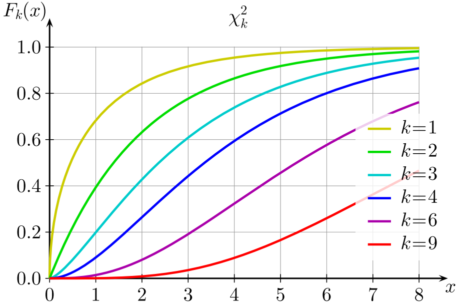
hat. Dabei ist Γ die sogenannte Gamma-Funktion, welche für Werte der Form $n/2, n \in \mathbb{N}$ rekursiv aus $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ für alle $r \in [0, \infty[$ berechnet werden kann.



χ^2-Verteilung

- Eine χ^2-verteilte Zufallsvariable nimmt nur positive Werte an
- Die Verteilungsfunktion und die Quantile der χ^2-Verteilung sind in Tabellen aufgelistet.
- R-Befehle: `pchisq` für Verteilungsfunktion, `qchisq` für Quantil

Verteilungsfunktion:



χ^2-Verteilung

(Satz 9.3) Seien $Y_1, ..., Y_n$ unabhänigige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann folgt die Zufallsvariable

$$Y_1^2 + ... + Y_n^2$$

einer χ^2-Verteilung mit Parameter n.

- (ohne Beweis)

Konfidenzintervall für die Varianz der Normalverteilung

(Satz 9.5) Seien $x_1, ..., x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für σ^2 erhält man als

$$J = \left[\bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

wobei $\bar{\sigma}_n^2$ die empirische Varianz ist, und $\chi^2_{n-1,\beta}$ das $\beta-$Quantil der χ^2-Verteilung mit Parameter $n-1$.

- (ohne Beweis; ähnlich wie für Satz 9.8, via Ansatz und Umformungen, welche den Satz 9.11 verwenden)
- Vorsicht: Parameter der χ^2-Verteilung ist in diesem Fall $n-1$ und nicht n
- Vorsicht: χ^2-Verteilung ist nicht symmetrisch, deshalb kann $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ nicht direkt aus $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ berechnet werden

Konfidenzintervall für die Varianz der Normalverteilung

(Satz 9.5) Seien $x_1, \dots, x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für σ^2 erhält man als

$$J = \left[\bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

wobei $\bar{\sigma}_n^2$ die empirische Varianz ist, und $\chi^2_{n-1,\beta}$ das $\beta-$Quantil der χ^2-Verteilung mit Parameter $n-1$.

- (ohne Beweis; ähnlich wie für Satz 9.8, via Ansatz und Umformungen, welche den Satz 9.11 verwenden)
- Vorsicht: Parameter der χ^2-Verteilung ist in diesem Fall $n-1$ und nicht n
- Vorsicht: χ^2-Verteilung ist nicht symmetrisch, deshalb kann $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ nicht direkt aus $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ berechnet werden

Quantile der χ^2-Verteilung

$\chi^2_{n,\beta}$ mit $\mathbb{P}(X \leq \chi^2_{n,\beta}) = \beta$ für eine χ^2-verteilte Zufallsvariable X mit Freiheitsgrad n.

n \ β	0.9	0.95	0.975	0.99
1	2,71	3,84	5,02	6,63
2	4,61	5,99	7,38	9,21
3	6,25	7,81	9,35	11,34
4	7,78	9,49	11,14	13,28
5	9,24	11,07	12,83	15,09
6	10,64	12,59	14,45	16,81
7	12,02	14,07	16,01	18,48
8	13,36	15,51	17,53	20,09
9	14,68	16,92	19,02	21,67
10	15,99	18,31	20,48	23,21
11	17,28	19,68	21,92	24,73
12	18,55	21,03	23,34	26,22
13	19,81	22,36	24,74	27,69
14	21,06	23,68	26,12	29,14
15	22,31	25,00	27,49	30,58
16	23,54	26,30	28,85	32,00
17	24,77	27,59	30,19	33,41
18	25,99	28,87	31,53	34,81
19	27,20	30,14	32,85	36,19
20	28,41	31,41	34,17	37,57
25	34,38	37,65	40,65	44,31
30	40,26	43,77	46,98	50,89
40	51,81	55,76	59,34	63,69
50	63,17	67,50	71,42	76,15
100	118,50	124,34	129,56	135,81

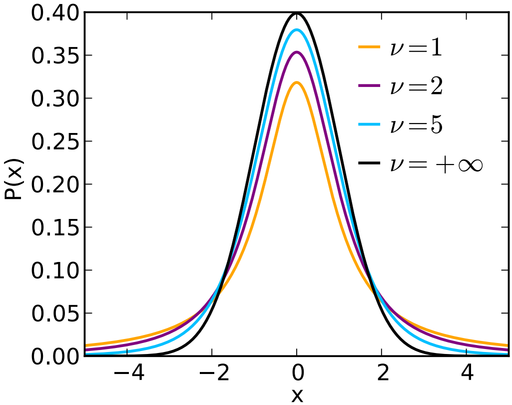
$t-$Verteilung

(Def. 9.4) Eine Zufallsvariable X heißt t-verteilt zum Parameter $n \in \mathbb{N}$, falls sie die Dichte

$$f_n(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

hat. Dabei ist Γ wieder die Gamma-Funktion.

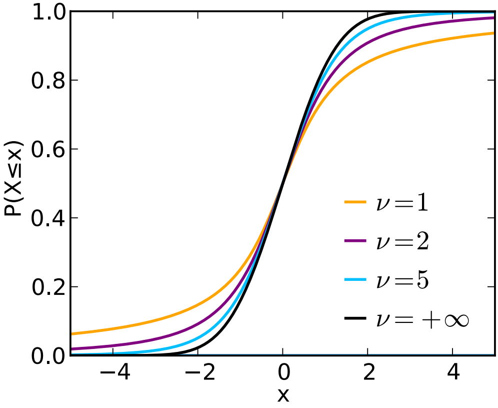
$t-$Verteilung



- Normalverteilung für $n \to \infty$
- Die Verteilungsfunktion und die Quantile der $t-$Verteilung sind in Tabellen aufgelistet.

$t-$Verteilung

Verteilungsfunktion:



t-Verteilung

(Satz 9.4) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Seien $\bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n)$ und $\bar{\sigma}_n(X_1, ..., X_n)$ das empirische Mittel bzw. die empirische Standardabweichung dieser Zufallsvariablen. Dann folgt die Zufallsvariable

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n) - \mu)}{\bar{\sigma}_n(X_1, ..., X_n)}$$

einer t-Verteilung mit Parameter $n - 1$.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung

(Satz 9.6) Seien $x_1, ..., x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für μ erhält man als

$$J = \left[\bar{\mu}_n - \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, \bar{\mu}_n + \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right]$$

wobei $\bar{\mu}_n$ das empirische Mittel, $\bar{\sigma}_n$ die Wurzel aus der empirischen Varianz, und $t_{n-1,1-\alpha/2}$ das Quantil der $t-$Verteilung mit Parameter $n-1$ ist.

- Faustregel: Für $n > 30$ kann die $t-$Verteilung durch die Normalverteilung approximiert werden.

Quantile der $t-$*Verteilung*

$t_{n,\beta}$ mit $\mathbb{P}(X \leq t_{n,\beta}) = \beta$ für eine $t-$verteilte Zufallsvariable X mit Freiheitsgrad n an. Symmetrie: $t_{n,1-\beta} = -t_{n,\beta}$.

n \ β	0.9	0.95	0.975	0.99
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
25	1,316	1,708	2,060	2,485
30	1,310	1,697	2,042	2,457
40	1,303	1,684	2,021	2,423
50	1,299	1,676	2,009	2,403
100	1,290	1,660	1,984	2,364
1000	1,282	1,646	1,962	2,330