Quantile

Falls Y bzw. F_Y eine Dichte f_Y hat, so gilt für q_β

$$F_Y(q_\beta) = \int_{-\infty}^{q_\beta} f_Y(t)\,dt \geq \beta$$

$$\shortparallel$$

$$P(Y \leq q_\beta)$$

sogar $=$ für Dichte

Löse dann also

$$F_Y(q_\beta) = \beta$$

Falls F_Y invertierbar: $q_\beta = F_Y^{-1}(\beta)$

z. B. für Exponentialverteilung.

Bsp. Binomialverteilung

$X \sim Bin(10, \tfrac{1}{2})$ $\quad \beta = 0.05$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

- $P(X \leq 0) = P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.00098$
- $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \ldots = 0.0107 < 0.05$
- $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \ldots \approx 0.055 > 0.05$

Somit ist $q_\beta = 2$ für $0.05 = \beta$

aber es gilt $\underline{P(X \leq q_\beta) > \beta}$

da die Verteilung für $p = \tfrac{1}{2}$ symmetrisch ist, gilt: für $\beta' = 1 - \beta = 0.95$

$P(X \leq q_{\beta'}) > 0.95$

$q_{\beta'} =$

$P(X \geq 8) = P(X \leq 2) \approx 0.055$

$P(X \geq 9) = P(X \leq 1) \approx 0.01..$

$P(X \leq 8) = 1 - P(X \geq 9) \geq 0.95$

$P(X \leq 7) < 0.95$

$\Rightarrow \boxed{q_{\beta'} = 8}$

$J(x) = \{\vartheta \in \Theta : x \geq q_{\vartheta,\alpha}\}$

Beh: $J(X)$ ist Konfidenzbereich zum Fehlerniveau α.

Bew. Sei $\vartheta \in \Theta$

$\underline{P_\vartheta(J(X) \ni \vartheta)} = P(X \geq q_{\vartheta,\alpha})$

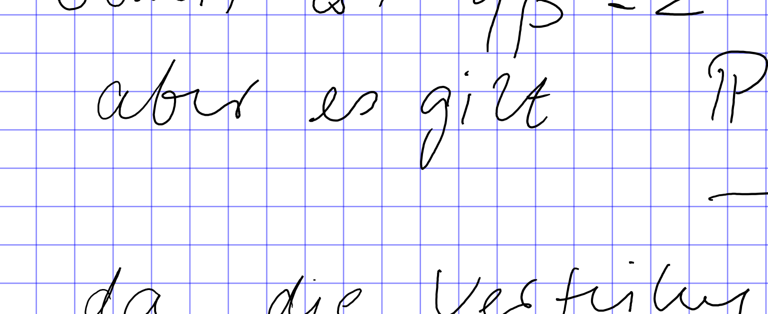
$= 1 - P_\vartheta(X \leq q_{\vartheta,\alpha})$

$= \underline{1 - \alpha}$ nach Def. Quantil

Ges $J \subset \mathbb{R}$ s. d.

(*) $\quad \underline{P_\mu(J \ni \mu) \geq 1 - \alpha = 0.95} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Ansatz $\quad J = [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h]$



wobei h so gewählt werden soll, dass (*) erfüllt ist.

D. h. wir suchen h so, dass

$1 - \alpha \overset{(*)}{\leq} \underline{P_\mu(J \ni \mu)}$

Ansatz $= P_\mu(\mu \in [\bar{\mu}_n - h, \bar{\mu}_n + h])$

Def. emp. Mittel $\quad = P_\mu\left(\mu \in \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - h, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i + h\right]\right)$

$= P_\mu\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}_{=\bar{\mu}_n - \mu} \in [-h, h]\right)$

$\mu = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu$

$\mu \in [\mu_n - h, \mu_n + h]$
$\Leftrightarrow \mu_n - \mu \in [-h, h]$

links und rechts mit $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ multipliziert

$= P_\mu\left(\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}_{=:\, Y \,\sim\, N(0,1)} \in \left[-\frac{h\sqrt{n}}{\sigma}, \frac{h\sqrt{n}}{\sigma}\right]\right)$

(**)

Nebenrechnung: Bew. von (**)

Satz: X, Y unabh. normalvert. mit μ_1, σ_1^2 und μ_2, σ_2^2 dann ist $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

also iterativ $X_1, \ldots, X_n$ unabh. mit μ, σ^2

$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n \cdot \mu, n\sigma^2)$

$\Rightarrow$ Standardisierung $\quad \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \sim N(0,1)$

$\Rightarrow$ (**)

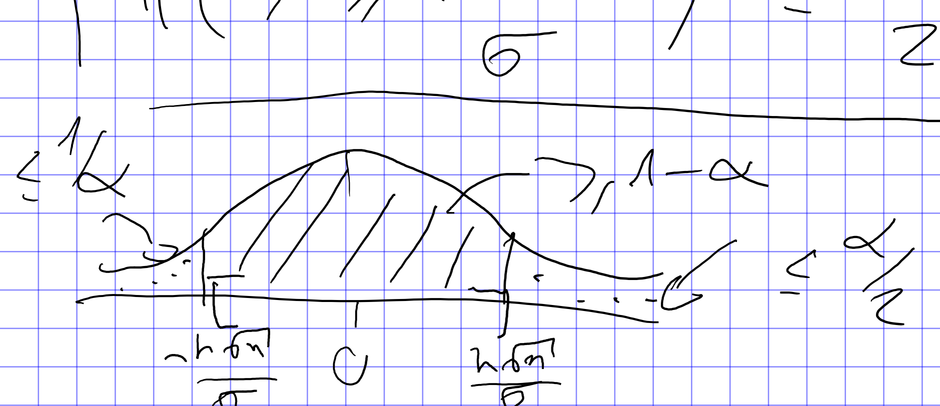
Damit gilt also (*) genau dann, wenn für $Y \sim N(0,1)$

(Δ) $\quad \boxed{P\left(Y \in \left[-\frac{h\sqrt{n}}{\sigma}, \frac{h\sqrt{n}}{\sigma}\right]\right) \geq 1 - \alpha}$

erfüllt ist

d. h. wegen der Symmetrie der Standardnormalverteilung ist (Δ) genau dann erfüllt wenn:

$\boxed{P\left(Y \geq \frac{\sqrt{n}\,h}{\sigma}\right) \leq \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}\,h}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$



$\Leftrightarrow \boxed{h = \frac{\sigma \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das Quantil der Standardnormalverteilung.