

Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

Vorlesung 5

Inhalt

- ▶ Exponentielles Wachstum
- ▶ Wachstum und Zerfall: Modellierung und Berechnung
- ▶ Logarithmische Skalen

Lernziele

- ▶ Beispiele für exponentielles Wachstum kennen
- ▶ Wachstums- und Zerfallprozesse berechnen können
- ▶ Mit logarithmischen Skalen arbeiten können

Benötigte Vorkenntnisse

- ▶ Potenz- und Logarithmengesetze

Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x,$$

mit $e = 2.718281\dots$ die Euler'sche Zahl.

- ▶ Maximaler Definitionsbereich: \mathbb{R}
- ▶ Wertebereich: $]0, \infty[$
- ▶ Wachsende Funktion, $e^0 = 1$
- ▶ Allgemeiner: $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$

Exponentialfunktion

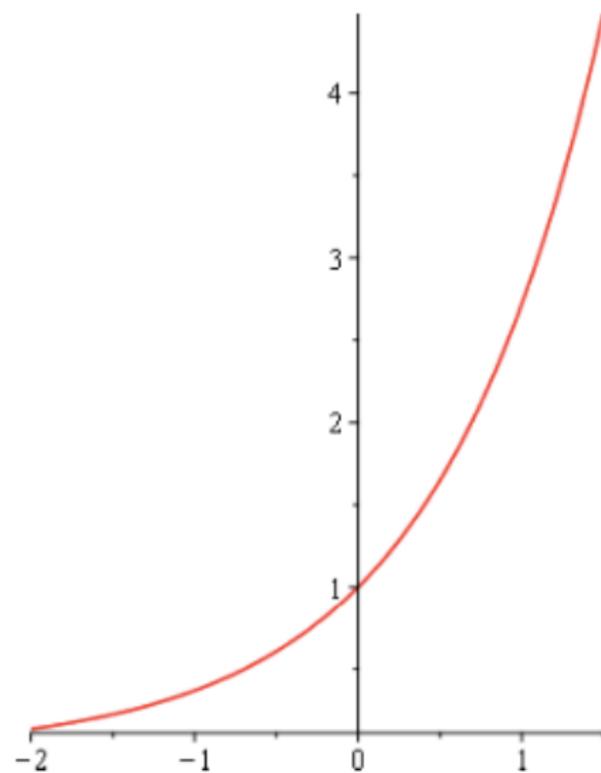


Abbildung 6: $f(x) = e^x$

Exponentielles Wachstum

Hintergrund: Bakterienwachstum durch Zellteilung - Verdoppelung zu festen Zeiten. Anzahl Bakterien: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^k

Allgemeiner Ansatz für (exponentielle) Wachstumsprozesse:

$$f(t) = A \cdot e^{Bt},$$

wobei t die Zeit, $f(t)$ die Anzahl (Bakterien o.ä.) und A, B Parameter sind.

Beispiel 3.1.2 Vermehrung von *Vibrio Cholerae*

In einem exponentiellen Wachstumsprozess mit $f(t) = A \cdot e^{Bt}$ verdoppelt sich die Population jeweils nach der Zeit

$$t_D = \frac{\ln 2}{B}$$

(Verdoppelungszeit). Solche Prozesse treten auch z.B. bei der ungebremsten Ausbreitung von Infektionen auf.

Zerfallsprozesse (Reaktionen erster Ordnung)

Allgemeiner Ansatz für (exponentielle) Zerfallsprozesse:

$$f(t) = A \cdot e^{-Bt},$$

wobei t die Zeit und A, B Parameter sind. Diese Funktion fällt mit der Zeit.

Beispiel: Zerfall eines Stoffes bei einer Reaktion, in der die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur Menge des vorhandenen Stoffes ist (Reaktion erster Ordnung, Reaktionskonstante B).

In einem exponentiellen Zerfallsprozess mit $f(t) = A \cdot e^{-Bt}$ halbiert sich die Stoffmenge jeweils nach der Zeit

$$t_D = \frac{\ln 2}{B}$$

(Halbwertszeit; vgl. auch radioaktiver Zerfall)

Logarithmische Skalen und Transformationen

Frage: Wie kann ich unterscheiden, ob eine wachsende Funktion eine Potenzfunktion (z.B. x^2) oder eine Exponentialfunktion (z.B. 2^x) ist?

- ▶ Beide Funktionen wachsen, die Exponentialfunktion deutlich schneller als die Potenzfunktion
- ▶ Sehe ich jedoch nur einen Teil des Graphen, oder kenne ich nur einige Werte, kann ich das schwer unterscheiden

Ansatz: Logarithmische Skalen

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = x^2$$

Logarithmieren:

$$\ln f(x) = \ln(2^x) = x \ln(2) \quad \ln g(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x$$

Damit ist $\ln f(x)$ eine lineare Funktion, $\ln g(x)$ eine logarithmische Funktion.

Beispiel: Arrhenius-Gleichung

Logarithmische Skalen und Transformationen

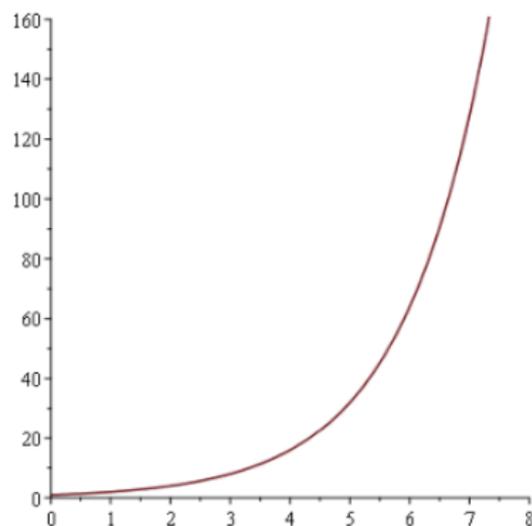


Abbildung 10: $f(x) = 2^x$ mit linearer y -Skala

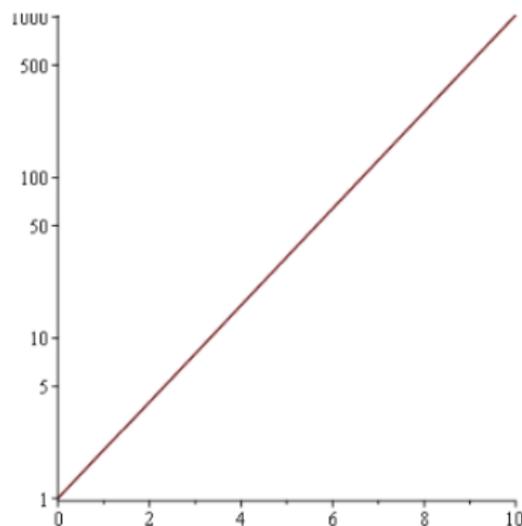


Abbildung 11: $f(x) = 2^x$ mit logarithmischer y -Skala

Logarithmische Skalen und Transformationen

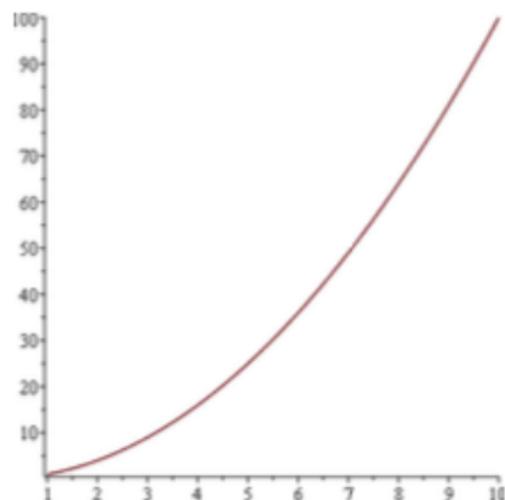


Abbildung 12:
 $f(x) = x^2$ mit linearen Skalen

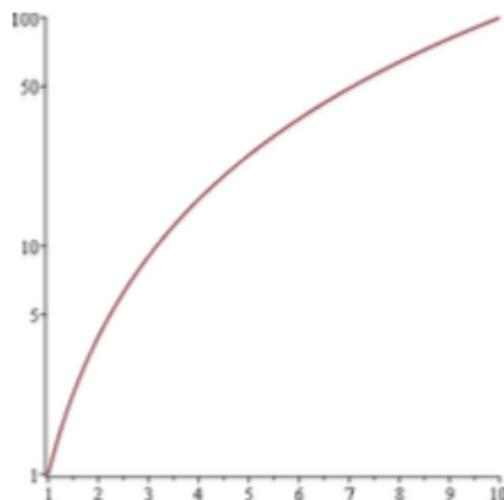


Abbildung 13:
 $f(x) = x^2$ mit logarithmischer
 y -Skala

Potenzfunktion mit doppelt-logarithmischer Skala

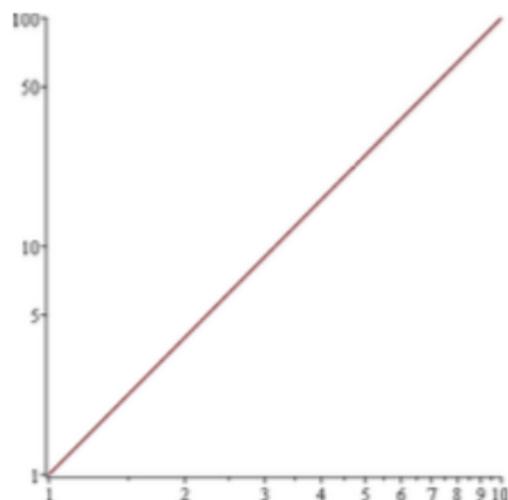


Abbildung 14:
 $f(x) = x^2$ mit doppeltlogarithmischer Skalierung (logarithmische x - und y -Achse)