Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

Vorlesung 12

Inhalt

- Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz
- Unabhängigkeit und Korrelation
- Regressionsgerade

Lernziele

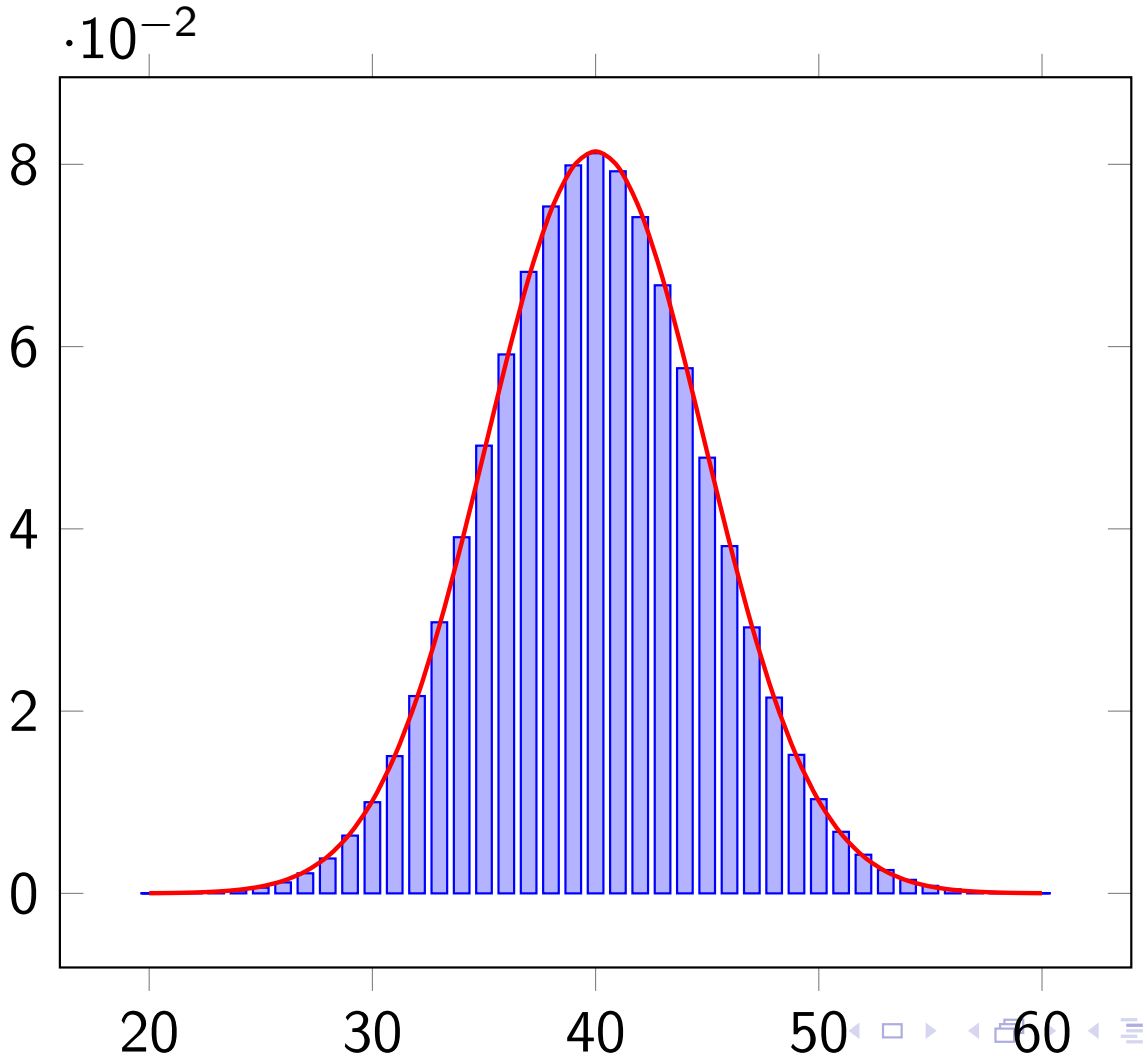
- Mit der Normalverteilung rechnen können
- Gründe für die Bedeutung der Normalverteilung kennen
- Unabhängigkeit und Korrelation kennen
- Korrelationskoeffizienten und Regressionsgeraden berechnen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Funktionen, Zahlenmengen, Mengenoperationen; Differential- und Integralrechnung

Normalverteilung

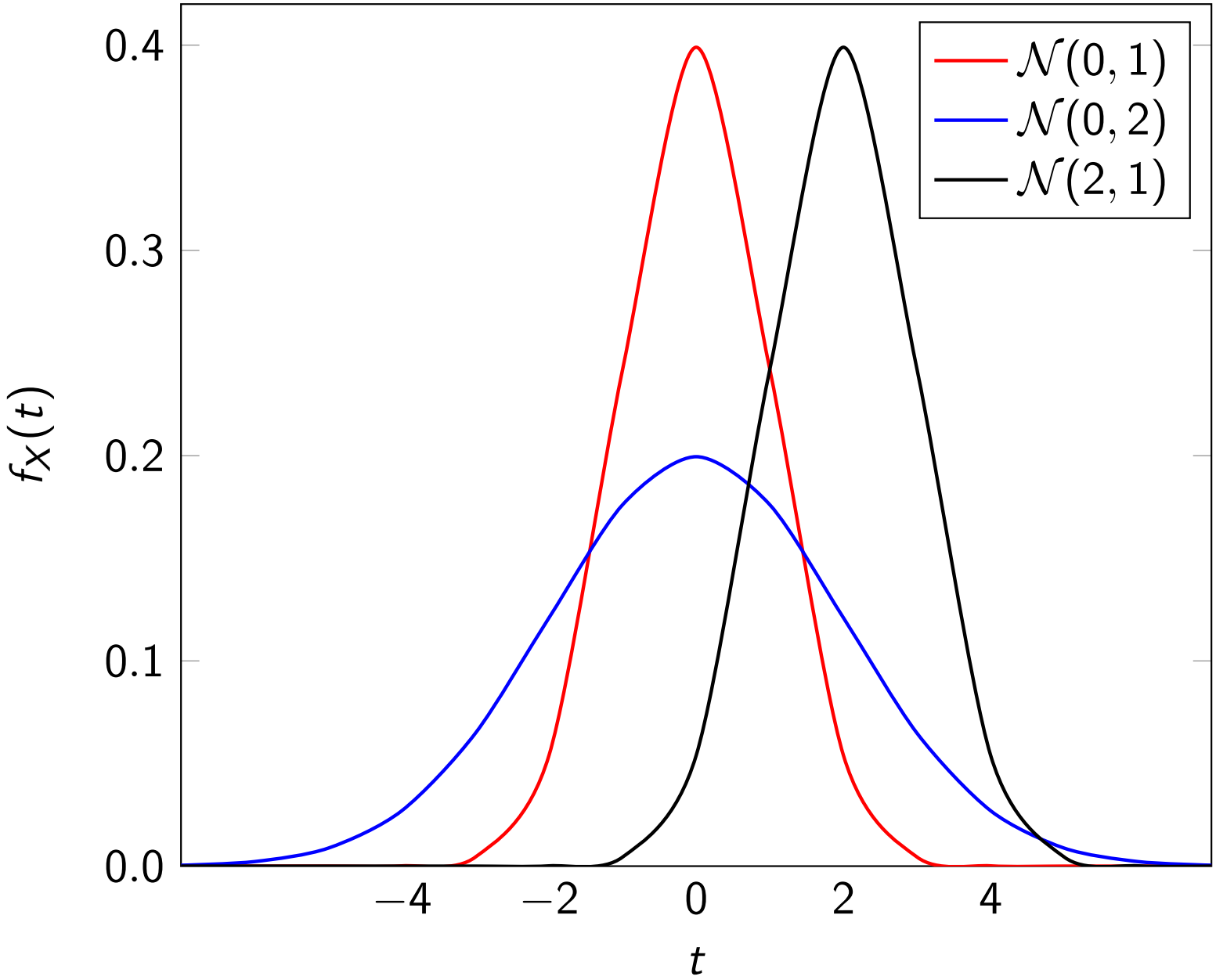
Hat die Häufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitsverteilung (annähernd) die Form einer Gaußschen Glockenkurve, so handelt es sich (nährungsweise) um eine Normalverteilung.



Normalverteilung

- Die Stelle des Maximums (Werte mit der höchsten Wahrscheinlichkeit) liegt beim Mittelwert/Erwartungswert.
- Die Breite der Kurve wird durch die Varianz/Standardabweichung/Streuung bestimmt.
- Man sagt deshalb "die Daten folgen (näherungsweise) einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 (oder Standardabweichung σ).

Normalverteilung



Faustregel für die Normalverteilung

Folgen die Daten näherungsweise einer Normalverteilung, so liegen

- ca. 68.3% der Messwerte innerhalb einer Standardabweichung um den Mittelwert, also im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- ca. 95.5% der Werte liegen innerhalb von zwei Standardabweichungen, also im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.
- ca. 99.7% liegen innerhalb von 3σ
- Werte außerhalb dieser Intervalle sind sehr unwahrscheinlich.

Rechnen mit der Normalverteilung

Leider ist das direkte Rechnen mit einer Normalverteilung schwierig. Theoretisch gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

wobei μ der Mittelwert und σ^2 die Varianz (σ die Standardabweichung) der normalverteilten Größe X ist.

Praktisch schaut man diese Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle nach, oder lässt sie mit dem Rechner berechnen.

Beispiel Excel: NORM.VERT(a; μ; σ; WAHR) gibt die Wahrscheinlichkeit aus, dass eine normalverteilte Größe X mit Mittelwert μ und Standardabweichung (!) σ kleiner oder gleich a ist.

Rechnen mit der Normalverteilung

Tabellen oder Programme wie Excel geben die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass der Wert} \leq a \text{ ist}$$

aus. Sind andere Wahrscheinlichkeiten gesucht, muss man die folgenden Rechenregeln verwenden:

- $\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a)$
- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$
- Beispiel an der Tafel

Standardisierung: Falls X normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 ist, so ist $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1, man spricht von Standardnormalverteilung.

Normalverteilung: Tabelle

$\Phi_{0,1}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964

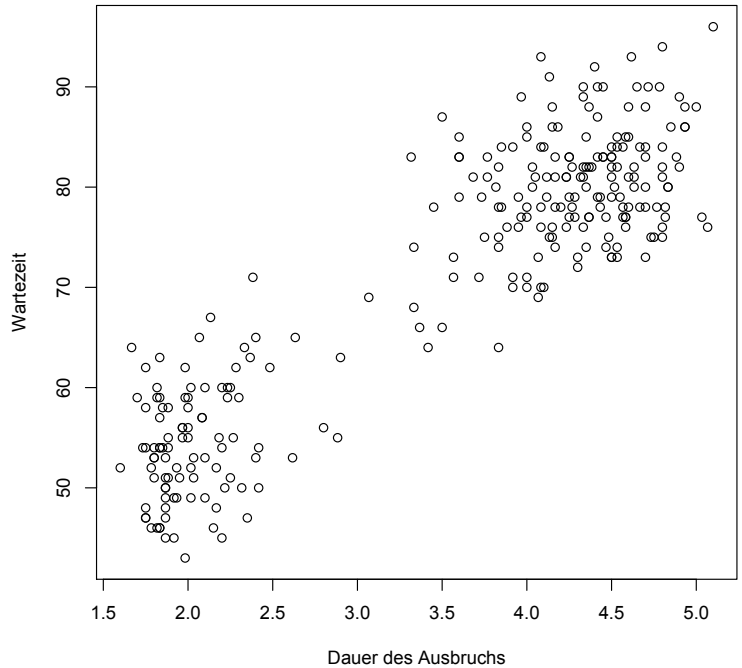
Zentraler Grenzwertsatz

- Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass für unabhängige Messungen der gleichen Messgröße

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

  ungefähr (für große n) standardnormalverteilt ist.
- Wann immer viele unabhängige Ergebnisse aufsummiert werden, so ist das Ergebnis nach Reskalierung ungefähr normalverteilt.
- Insbesondere sind Häufigkeitsverteilungen von Erfolg/Misserfolg für eine große Stichprobe stets annähernd normalverteilt

Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen



- Daten von zwei gleichzeitig gemessenen Größen: Paare von Messwerten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$.
- Daten $(x_i, y_i)_{i=1,...,n}$ ergeben eine Punktwolke.
- Maß für den Grad der Abhänigigkeit?

Korrelationen zwischen Daten

Seien $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ gegeben. Die empirische Kovarianz ist definiert als

$$c_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\mu}_x)(y_i - \bar{\mu}_y),$$

wobei $\bar{\mu}_x$ das empirische Mittel der x_i und $\bar{\mu}_y$ das empirische Mittel der y_i ist.

Der empirische Korrelationskoeffizient ist definiert als

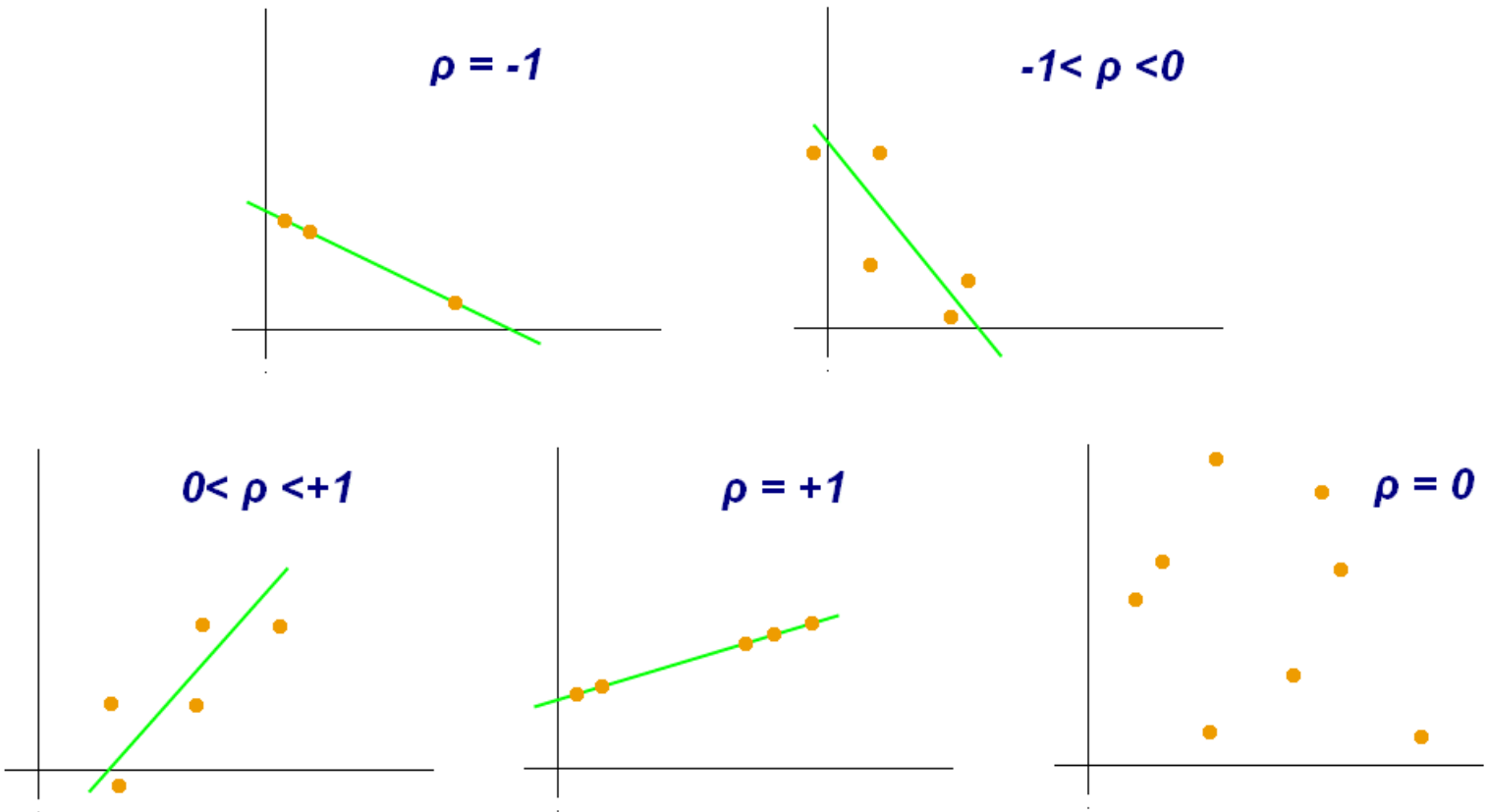
$$r_{xy} = \frac{c_{xy}}{\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y},$$

wobei $\bar{\sigma}_x = \sqrt{\bar{\sigma}_x^2}$ die empirische Standardabweichung von x ist (und analog $\bar{\sigma}_y$ für y).

Linearer Zusammenhang ($\rho = r$)

Korrelation kann positiv oder negativ sein, $-1 \leq r \leq 1$

(Quelle: Wikipedia)



Stärke der Korrelation

Faustregel für die Stärke der Korrelation:

- $r > 0.75$ starke positive Korrelation
- $0.5 < r < 0.75$ mittlere positive Korrelation
- $0.25 < r < 0.5$ schwache positive Korrelation
- $r < 0.75$ starke negative Korrelation, etc.

Excel: =KORREL(Bereich1;Bereich2) gibt den Korrelationskoeffizienten für die Daten in Bereich 1 (x) und Bereich 2 (y) aus.

Lineare Regression

Gegeben: $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$

Gesucht: Die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Gerade mit der Gleichung

$$y = ax + b$$

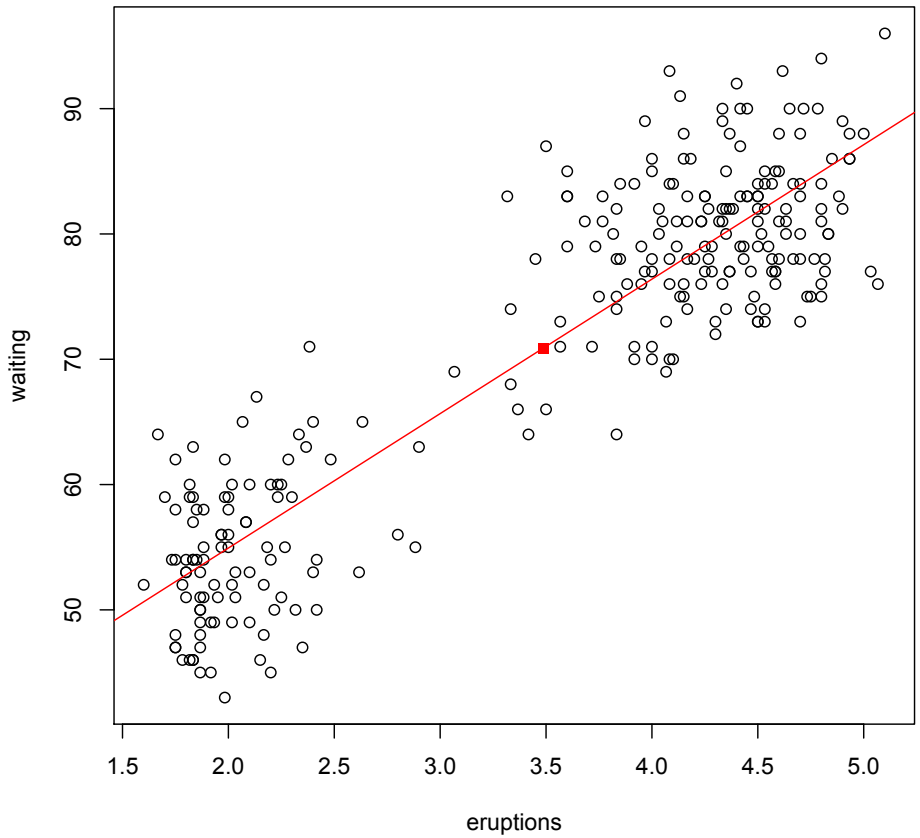
zwei Bedingungen erfüllt:

- $(\bar{\mu}_x, \bar{\mu}_y)$ liegt auf der Geraden, also $\bar{\mu}_y = a \cdot \bar{\mu}_x + b$,
- Die Abstände der Punkte von der Geraden sind minimal.

Die beiden Bedingungen legen a und b eindeutig fest, und zwar als

$$a = \frac{c_{xy}}{\bar{\sigma}_x^2}, \quad b = \bar{\mu}_y - a \cdot \bar{\mu}_x.$$

Lineare Regression



In EXCEL: =RGP(Y-Werte;X-Werte:WAHR) gibt die Regressionsgerade (Werte für a und b) aus.