Bsp 2.2

Würfeln unter Zusatzinformation

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ $\quad \mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6)$

B = Ergebnis ist gerade
$= \{2, 4, 6\}$ meine Zusatzinformation

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{2\}}_{A} \mid B) \overset{\text{Def. 2.1}}{=} \frac{\mathbb{P}(\{2\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{2\})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Weiß: B ist eingetreten

$$\mathbb{P}(\{1\} \mid B) \overset{\text{Def. 2.1}}{=} \frac{\mathbb{P}(\{1\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{1/2} = \underline{\underline{0}}$$

Bsp. 2.3

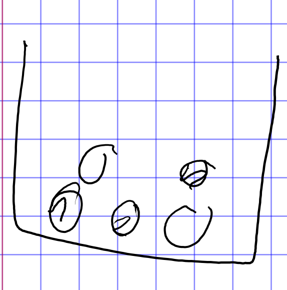
Lebensdauer eines Bauteils bzw. Menschen

- Zufallsexperiment: Zufällige Auswahl eines Bauteils aus einer Menge gleichartiger, Bestimmung der Wahrsch. für eine bestimmte Lebensdauer
- $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
  Lebensdauer in Jahren
- $\mathbb{P} = ?$
  Lebensversicherungen: Sterbe-Tafeln
  diese enthalten bedingte W. keiten

$p_k = \mathbb{P}(\{k\} \mid \{k, k+1, \dots\})$
= Bedingte W. keit, dass das Lebensalter k ist, gegeben / unter der Info, dass es mindestens k ist

Beispiel für mehrstufige Experimente:

Ziehen ohne Zurücklegen



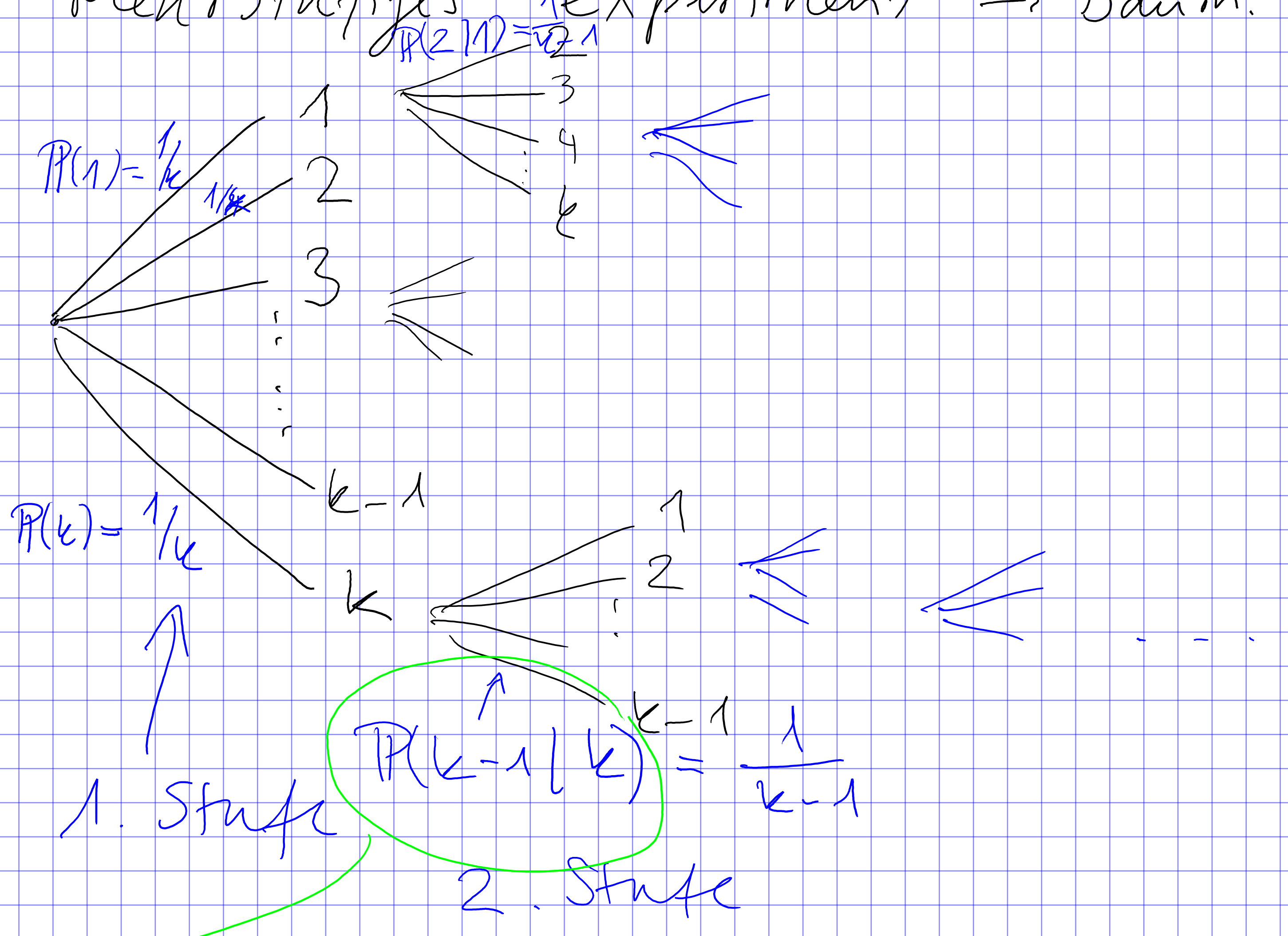
Urne mit k Kugeln, nummeriert mit den Zahlen von 1 bis k.

Ziehe n mal ohne Zurücklegen aus der Urne, $n \leq k$

Ergebnismenge
$$\Omega_n = \{ w = (w_1, \ldots, w_n) : w_i \in \{1, \ldots, k\}, i = 1, \ldots, n \\ w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j \}$$

$\mathbb{P}(w) = ?$

Mehrstufiges Experiment → Baum:



$$\mathbb{P}((w_1, \ldots, w_n)) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k-n+1}$$

$\mathbb{P}(\{k-1\} | \{k\}) = \mathbb{P}($in der 2. Stufe die Kugel $k-1$ zu ziehen, gegeben dass in der 1. Stufe die Kugel Nr. k gezogen wurde$)$

$\mathbb{P}(\{w_2 = k-1\} | \{w_1 = k\})$

auf mehrere Ereignisse bedingen:

i-te Stufe:
$$P(w_i | \{w_1\} \cap \{w_2\} \cap \ldots \cap \{w_{i-1}\})$$

z.B. $k = 10$
$$P(w_4 = 2 | w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 8) = \frac{1}{7} = \frac{1}{10-4+1}$$

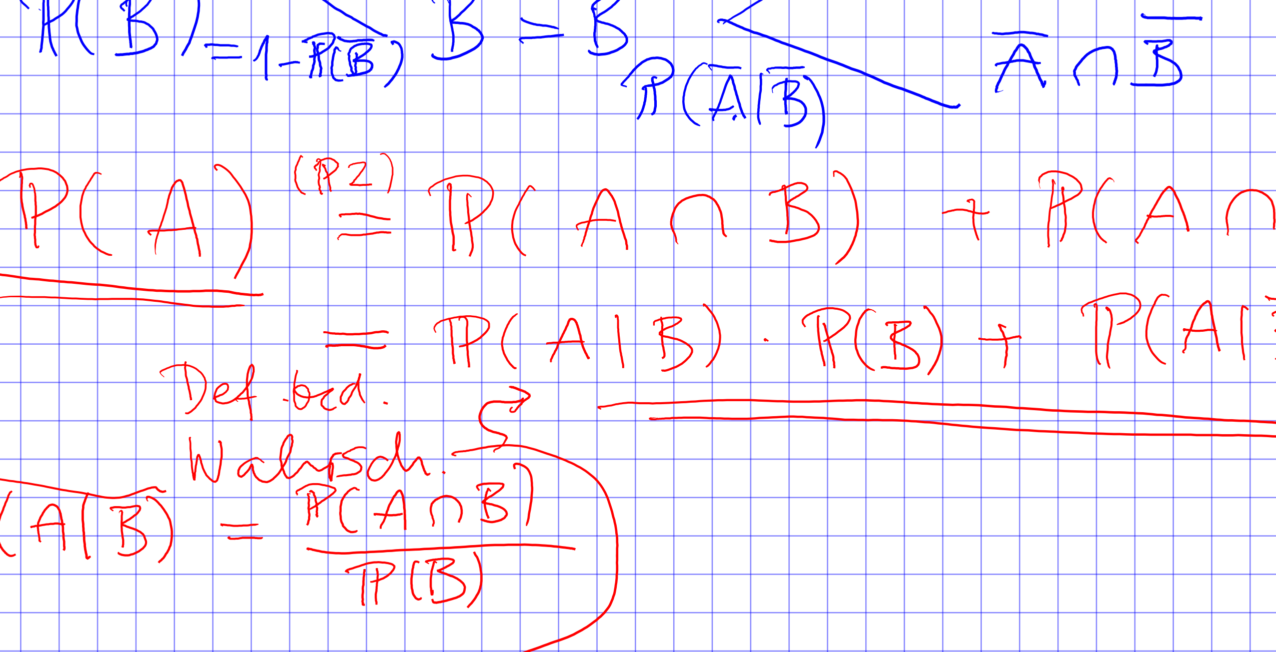
P im 4. Schritt die 2 zu ziehen, wenn schon 5, 3, 8 gezogen wurden

$$\mathbb{P}(w_4 = 2 | w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 8)$$
$$= \mathbb{P}(\{w_4 = 2\} | \{w_1 = 5\} \cap \{w_2 = 3\} \cap \{w_3 = 8\})$$
$$\overset{\text{Def. bed. W.}}{=} \frac{\mathbb{P}(\{w_4 = 2\} \cap \{w_1 = 5\} \cap \{w_2 = 3\} \cap \{w_3 = 8\})}{\mathbb{P}(\{w_1 = 5\} \cap \{w_2 = 3\} \cap \{w_3 = 8\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(w_4 = 2, w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 8)}{\mathbb{P}(w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 8)}$$
$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

Formel von der Gesamtwahrsch.

Herleitung

Baumdarstellung A, B Ereignisse



$$\mathbb{P}(A) \overset{(P2)}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$
$$= \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B}) \mathbb{P}(\overline{B})$$

Def. bed. Wahrsch.
$$\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})}$$

Bsp. Test auf Krankheit

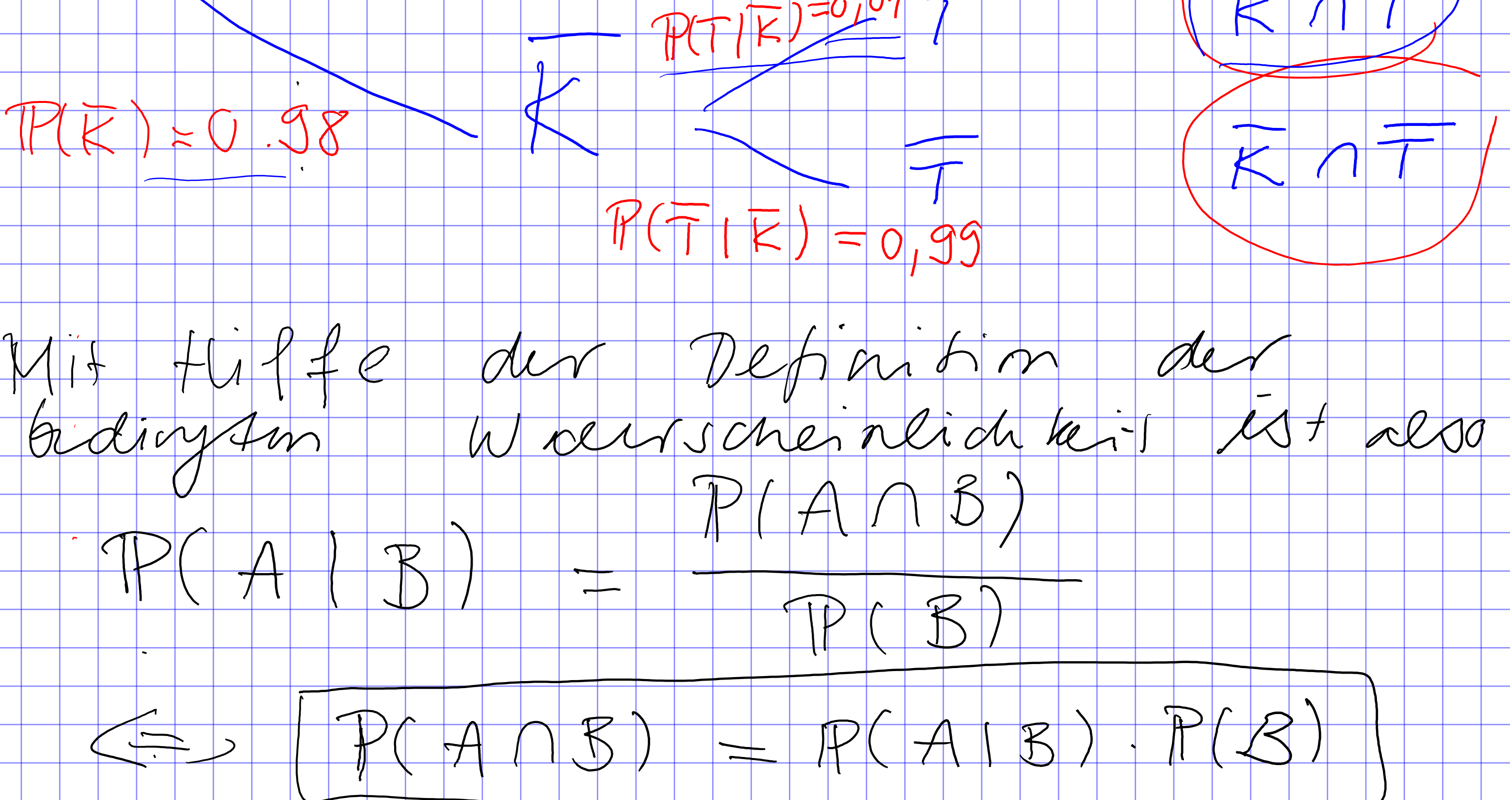
Krankheit bei 2% der Bevölkerung

Test: erkennt 99,7% der erkrankten Personen korrekt, gibt aber auch bei 1% der gesunden Personen ein falsch positives Ergebnis

Zufallsexperiment: Wähle zufällig eine Testperson aus.

Definiere Ereignisse:
K = Person ist krank / infiziert
T = Test ist positiv

Baum:



Mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist also
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Multiplikationsregel für mehrstufige Experimente: Multiplikation entlang der Äste

$$\mathbb{P}(K \cap T) = \mathbb{P}(K) \cdot \mathbb{P}(T|K) = 0{,}02 \cdot 0{,}997 = 0{,}01994$$

mit der Formel von der Gesamtwahrsch.

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(T|\overline{K}) \cdot \mathbb{P}(\overline{K})$$
$$= 0{,}997 \cdot 0{,}02 + 0{,}01 \cdot 0{,}98 =$$
$$= 0{,}02974$$

$\mathbb{P}(T) >> \mathbb{P}(K)$