Stochastik für die Informatik, Vorlesung 4

Freitag, 28. Oktober 2022 09:08

Inhalt

- (allgemeine Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit)
- Bayes-Formel
- Unabhängigkeit von Ereignissen

Lernziele

- Die Bayes-Formel kennen und damit rechnen können
- Unabhängigkeit von Ereignissen bestimmen können und um die Bedeutung wissen

Vorkenntnisse Wie bisher

Erinnerung: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Donnerstag, 27. Oktober 2022 18:35

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A gegeben B:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

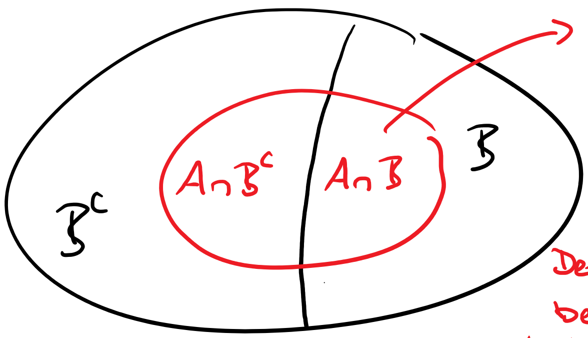
"Wahrscheinlichkeit für A unter der Zusatzinformation dass B eingetreten ist."

(Satz 2.1: Formel für die Gesamtwahrscheinlichkeit) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Intuition / Herleitung (letztes Mal): Baum

Alternative Intuition: Mengendiagramm



$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$\overset{\mathbb{P}2}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$

$\overset{\text{Definition}}{=} \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$

bedingte Wahrscheinlichkeit / Multiplikationsregel

Allgemeine Formel für die Gesamtwahrscheinlichkeit

Donnerstag, 27. Oktober 2022 19:15

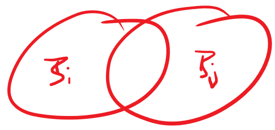
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i). \quad = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Disjunkte Zerlegung bedeutet dabei $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $\underline{B_i \cap B_j = \emptyset}$ für $i \neq j$, und $\underline{\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega}$ 2

1

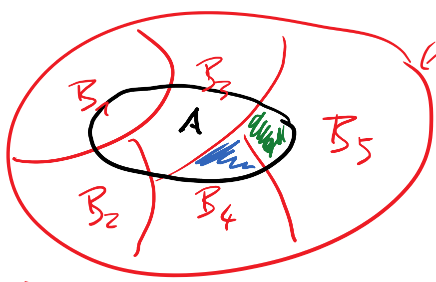
→ disjunkt!



→ nicht disjunkt!

2

$\Omega = B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_5$



⇒ disjunkte Zerlegung

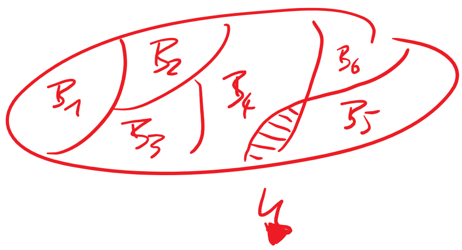
$$A = (A \cap B_5) \cup (A \cap B_4) \cup \ldots$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\underbrace{(A \cap B_5)}) + \mathbb{P}(A \cap B_4) + \ldots$$

$$\overset{=}{\uparrow} \sum \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

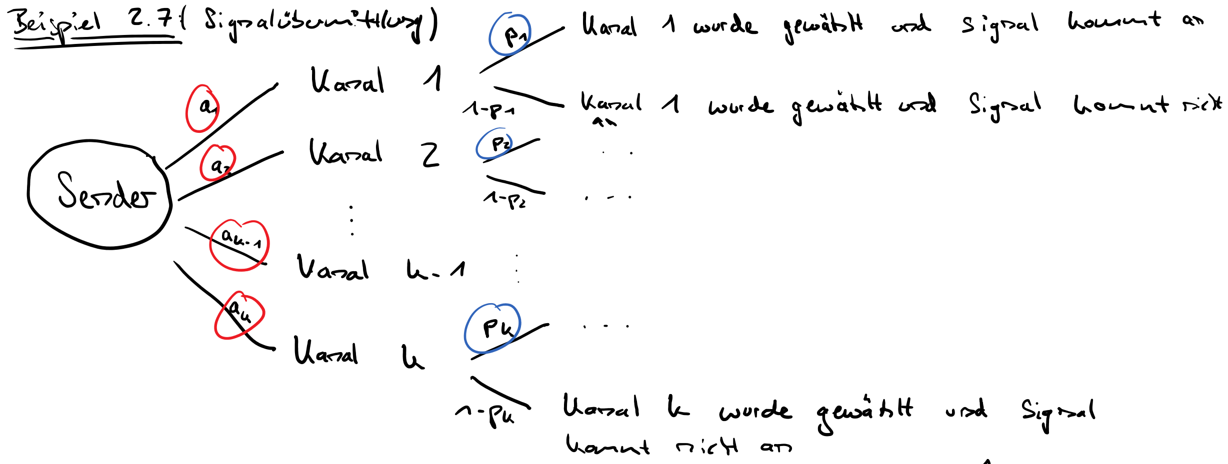
Multiplikation

keine disjunkte Zerlegung:



Beispiel: Signalübermittlung (Beispiel 2.7 im Buch)

Beispiel 2.7 (Signalübermittlung)



? Mit welcher W. kommt das Signal an?

(Anm. „B_i disj. Zerlegung")

S = Signal kommt an

$a_i = \mathbb{P}(\text{Kanal } i \text{ gewählt})$

$p_i = \mathbb{P}(\text{Signal kommt an} \mid \text{Kanal } i)$

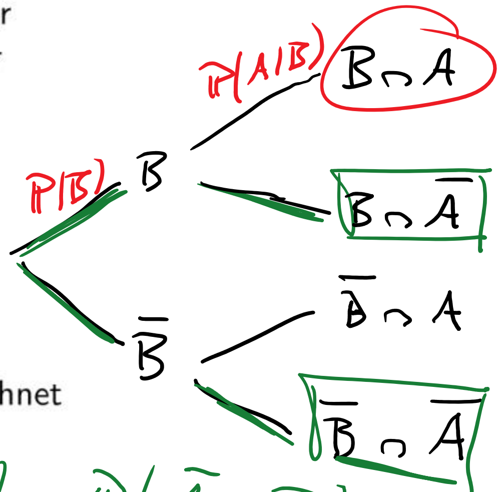
$$\mathbb{P}(S) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mathbb{P}(\text{Kanal } i \text{ wird gewählt})}_{a_i} \underbrace{\mathbb{P}(\text{Signal kommt an} \mid \text{Kanal } i \text{ wird gew.})}_{p_i}$$

allg. Formel für die Gesamt-W.

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$$

Mehrstufige Experimente

Freitag, 28. Oktober 2022 09:15



Mehrstufige Experimente: Baumdarstellung, auf den Ästen stehen die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

- "Multiplikationsregel": Umformulierung der Definition der Bedingten Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit für einzelne Ergebnisse berechnet sich durch Multiplikation entlang der Äste,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$$

- "Additionsregel": Umformulierung der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit für Ereignisse bestehend aus mehreren Endergebnissen berechnet sich durch Addition entlang der Blätter.

Bsp $\bar{A}$: $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

$= \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(\bar{A} | \bar{B}) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{A} | B)$

Bayes-Formel

Donnerstag, 27. Oktober 2022 20:09

Idee $\mathbb{P}(A|B)$ gegeben,
aber $\mathbb{P}(B|A)$ ist eigentlich für uns interessant

(Satz 2.3: Bayes-Umkehrformel) Seien A, B Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \boxed{\frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}}}$$

Beweis:

$$\mathbb{P}(B|A) \overset{\text{Def. Bed. W}}{\underset{!}{=}} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \overset{B \cap A = A \cap B}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\overset{\text{Mult regel}}{\underset{!}{=}} \boxed{\frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

Beispiel 2.11 (Test auf Krankheit, Fortsetzung letzte VL)

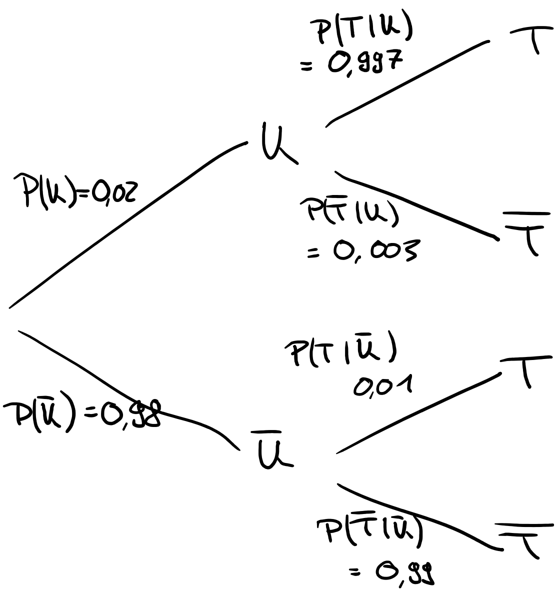
- Krankheit bei 2% der Bevölkerung
- Test:
  - erkennt 99,7% der erkrankten Personen korrekt
  - gibt bei 1% der gesunden Personen ein falsch positives Ergebnis

Zufallsexperiment: Wähle eine zufällige Person aus der Bevölkerung aus

$K :=$ "Person ist krank"

$T :=$ "Test ist positiv"

Letztes Mal: Darstellung als Baum



Außerdem:

$\mathbb{P}(K \cap T) = 0{,}01994$

$\mathbb{P}(T) = 0{,}02974$

$\mathbb{P}(T) \gg \mathbb{P}(K)$?

Jetzt: Wie hoch ist die W, dass eine positiv getestete Person tatsächlich krank ist?

$$\mathbb{P}(K \mid T) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(T \mid K)\,\mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(K)\,\mathbb{P}(T \mid K) + \mathbb{P}(K^c)\,\mathbb{P}(T \mid K^c)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}02}{0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}98 \cdot 0{,}03}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}402}} \;!!$$

=> Nur ca. 40% der positiv getesteten ist tatsächlich krank?!

Intuitiv hätte man erwarten können, dass fast 100% der positiv getesteten krank ist.

Wieso "nur" 40%?

-> es werden <u>sehr viele</u> gesunde Menschen getestet (nur 2% sind krank)

-> ein paar der gesunden haben ein falsch-positives Ergebnis

Bayes-Formel

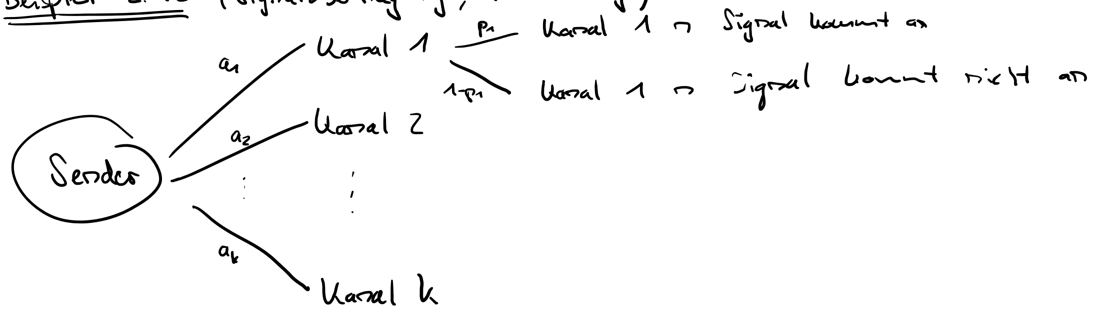
Donnerstag, 27. Oktober 2022 20:52

(Satz 2.4 Allgemeine Bayes-Umkehrformel) Seien $A, B_1, ..., B_n$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(B_i) > 0 \, \forall i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} = \frac{P(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

Bemerkung: $B_1, \ldots B_n$ sind eine disjunkte Zerlegung wie in der allg. Formel für die Gesamt-Wahrscheinlichkeit

Beispiel 2.12 (Signalübertragung, Fortsetzung)



Vorhin: $S =$ "Signal kommt an"

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$$

Jetzt: Das Signal ist angekommen.
Mit welcher W wurde Kanal j benutzt?
$K_j =$ "Kanal j wurde benutzt"

$\Rightarrow \mathbb{P}(K_j) = a_j$

$\mathbb{P}(S \mid K_j) = p_j$

$$\boxed{\mathbb{P}(K_j \mid S)} \underset{\text{Bayes allgemein}}{=} \frac{\mathbb{P}(S \mid K_j)\mathbb{P}(K_j)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{p_j a_j}{\sum_{i=1}^{k} p_i a_i}$$

Unabhängige Ereignisse

Donnerstag, 27. Oktober 2022 21:22

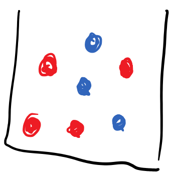
(Def. 2.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B heißen unabhängig, falls

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

gilt.

- Unabhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten von A nicht durch das Eintreten von B beeinflusst wird (und umgekehrt)

Beispiel 2.8 (Urnenmodell)



- Urne mit n roten und m blauen Kugeln
- 2x Ziehen ~~mit~~ ohne Zurücklegen
- B_i := "Kugel im i-ten Zug ist blau"

  R_i := "Kugel im i-ten Zug ist rot"

Fragen:
- Wie groß ist $\mathbb{P}(B_2)$
- Sind R_1 und B_2 unabhängig?, also gilt $\mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(B_2)$??

Es gilt
- $\mathbb{P}(R_1) = \frac{n}{n+m}$ (*)
- $\mathbb{P}(B_1) = \frac{m}{n+m}$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap B_2) \overset{\text{Mult. Regel}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(R_1)}_{(*)} \mathbb{P}(B_2 \mid R_1) = \boxed{\frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1}} \quad (i)$$

analog:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} \quad (ii)$$

- $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$

(ges. W. ~~...~~ implizit: Mult. regel)

$$= \underbrace{\frac{nm + m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}}_{(i)+(ii)} = \frac{m}{n+m}$$

$$\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(B_2) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m} \neq \boxed{\frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1}} = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2)$$

↯

$\Rightarrow$ es gilt nicht $\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2)$

$\Leftrightarrow$ R_1 und B_2 sind abhängig

Satz 2.2

Donnerstag, 27. Oktober 2022 21:54

(Satz 2.2) Zwei Ereignisse A und B auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ gilt.

Vorsicht: unabhängig $\neq$ disjunkt (eher das Gegenteil ist der Fall)

Bew

(i) z.z A, B unabhängig $\Rightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Bew (i):

A, B unabhängig

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \overset{!}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(A \mid B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def} \\ \text{Bed} \\ \text{W.}}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\circledast}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}(A)$$

(ii) $\mathbb{P}(A \mid B) \overset{\circ}{=} \mathbb{P}(A) \Rightarrow A, B$ unabh.

Bew (ii):

$$\mathbb{P}(A \cap B) \overset{\text{Mult. regel}}{=} \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) \overset{\circ}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$\blacksquare$

Unabhängigkeit von n Ereignissen

Donnerstag, 27. Oktober 2022 22:05

(Def. 2.3) Seien $A_1, ..., A_n \subseteq \Omega$ Ereignisse. Die n Ereignisse heißen unabhängig, falls für alle $2 \leq k \leq n$ und Indizes $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}, i_l \neq i_j$ für $l \neq j$ gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).}$$

Beispiel: Unabhängigkeit von drei Ereignissen A, B, C. Diese sind genau dann unabhängig, wenn alle folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),\right\}$$ „alle 2er Paare"

und

$\longrightarrow$ $$\left.\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).\right\}$$ „3er Paar"

__Beispiel 2.10:__ (Leitungssystem)

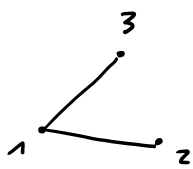
- Leitungssystem mit 3 Knoten
- Die Leitungen können unabhängig voneinander geöffnet oder geschlossen werden

$A_{i,j}$ = „Leitung zw. Knoten i und Knoten j ist geöffnet",

$1 \leq i < j \leq 3$

$\rightsquigarrow A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}$ sollen __unabhängig__ sein! Was bedeutet das?

Skizze



hier ist (1,3) und (1,2) offen. (= Strich). (2,3) ist geschlossen (kein Strich)

Antwort: es muss gelten

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3}) &= \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{2,3}) \\ \mathbb{P}(A_{1,3} \cap A_{2,3}) &= \mathbb{P}(A_{1,3})\mathbb{P}(A_{2,3}) \\ \mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3}) &= \ ... \end{aligned}\right\}$$ „alle 2er-Paare von Ereignissen"

__und__

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{2,3} \cap A_{1,3}) = \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{2,3})\mathbb{P}(A_{1,3})}_{\text{„3er Paar von Ereignissen"}}$$

Vererbung von Farbenblindheit

Freitag, 28. Oktober 2022 10:58

Beispiel 2.9 (Vererbung von Farbenblindheit)

Wikipedia: ca. 5 % der Bevölkerung betroffen

9 % der Männer, 1 % der Frauen

Genetik: Gen für Farbenblindheit auf X-Chromosom

Männer: X Y → farbenblind, falls X betroffen

von Mutter, von Vater

Frauen: X X → farbenblind, falls beide X betr.

Trägerin des Gens, falls min. ein X betroffen

Situation: Familie mit 2 Brüdern, A und B

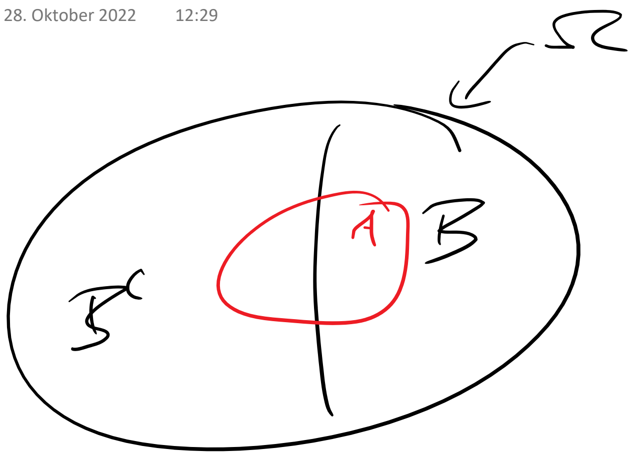
A = "Bruder 1 ist farbenblind"

B = "Bruder 2 ist farbenblind"

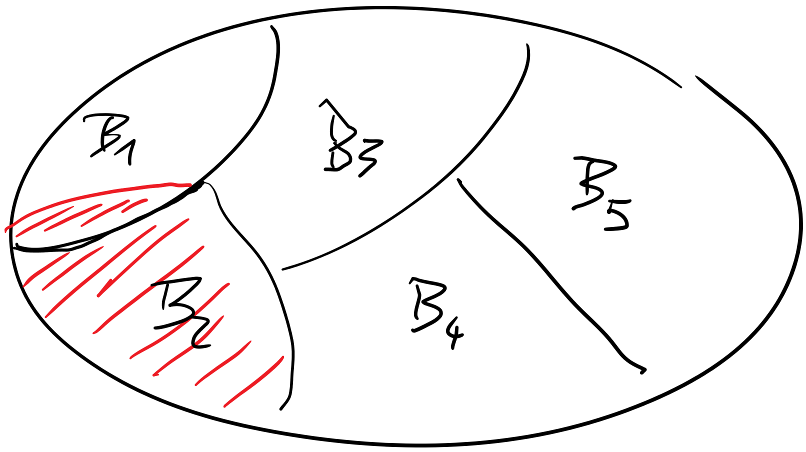
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.09$

$\mathbb{P}(A \mid B) = ? \neq \mathbb{P}(A)$

$0.5 > 0{,}09$, denn die Info, dass A farbenblind ist, sagt uns, dass die Mutter Trägerin ist.



Allgemeiner: $B_1, \dots, B_n \subset \Omega$



$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

„Zerlegung" von Ω.

„keine Überlappung"

= disjunkt

$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i,j$