<u>Beispiel zur Binomial- und geometrischen Verteilung</u>

Würfeln mit einem fairen Würfel

Bernoulli-Experiment:

Erfolg: Würfel zeigt 6

Misserfolg: keine 6

$p = \frac{1}{6}$

20× Würfeln: $n = 20$

X = Anzahl 6en

$$\mathbb{P}(X=8) = \binom{20}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{20-8}$$

X Binomial

$= \ldots$

$$\mathbb{P}(X \le 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$$
$$= \binom{20}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{20} + \binom{20}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{18}$$
$= \ldots$

Y = Erster Wurf, bei dem eine 6 kommt

Y ist geometrisch verteilt mit $p = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)$

$\mathbb{P}(Y=8) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{7}$

$$\mathbb{P}(Y>20) = \mathbb{P}(Y \ge 21) = \sum_{k=21}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=21}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=21}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

<u>Poisson-Verteilung</u>

ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, denn

$$P(X=k) = p_X(k) = \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\ge 0}\underbrace{e^{-\lambda}}_{\ge 0} \ge 0$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}}_{= e^{\lambda} \text{ e-Reihe}}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$
$$= e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = \underline{1}$$

Zahlenbeispiel:

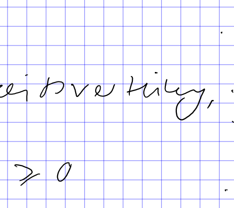
$X \sim Poi(3)$ d.h. $\lambda = 3$

$$P(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$$
$$= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$$

$\lambda = 3$ einsetzen $\rightsquigarrow$ Ergebnis

<u>Beispiel:</u> Poisson-Approximation im Erdős-Rényi-Zufallsgraph

ER-Zufalls~~gr~~graph:



$\underline{k}$ Knoten

zufällige Anzahl von Kanten (ungerichtet)

Zwischen jedem ungeordneten Paar von Knoten ist "mögliche" Kante mit Wahrsch. p vorhanden und mit $1-p$ nicht vorhanden.

$X^{(k)}$ = Anzahl Kanten im ER mit k Knoten

$X^{(k)}$ ist binomialverteilt mit Parametern $\boxed{\underline{n} = \binom{k}{2}}$ = Anzahl Paare von Knoten und p

Wähle jetzt die Erfolgswahrsch. p abhängig von n bzw. k und zwar so, dass die Bedingungen des Poisson-Grenzwertsatzes erfüllt sind, d.h.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n \cdot n = \lambda > 0}$$

dann ist $X^{(k)}$ <u>annähernd</u> Poisson-verteilt mit Parameter:

$\underline{\lambda} \approx n \cdot p_n = \underline{\binom{k}{2} \cdot p_k}$

d.h. wenn $p_k \approx \frac{\lambda}{\binom{k}{2}}$ ist, gilt

$$P(X^{(k)} = \ell) \approx \frac{e^{-\lambda}}{\ell!}\lambda^{\ell}$$

<u>Beispiel: Diskrete Gleichverteilung</u>

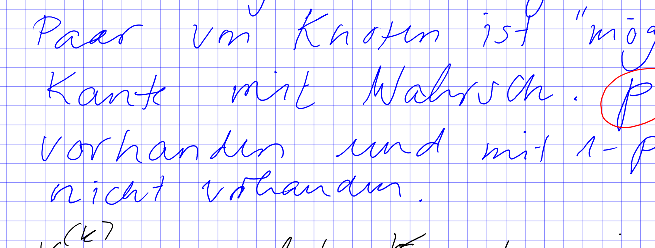
X heißt diskret gleichverteilt mit Parameter $n \in \mathbb{N}$

wenn $|X(\Omega)| = n$

und $\underline{\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}}$ $\forall k \in X(\Omega)$

d.h. die diskrete Gleichverteilung ist eine Verteilung auf einer Menge von n Elementen, bei der jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist.

<u>Gleichverteilung auf [0,1]</u>



X ist gleichverteilt auf $[0,1]$,

wenn $\mathbb{P}(X \le x_1) = x_1 = \frac{x_1 - 0}{1-0}$

= Länge des Intervalls von 0 bis x_1

$$\mathbb{P}(x_1 \le X \le x_2) = \mathbb{P}(X \le x_2) - \mathbb{P}(X < x_1) = x_2 - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1-0}$$

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(x_1 \le X \le x_1) = x_1 - x_1 = 0$$

Konstruktion / Simulation von beliebigen diskreten (endlichen) Verteilungen:

Sei X eine Zufallsvariable

$X = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$

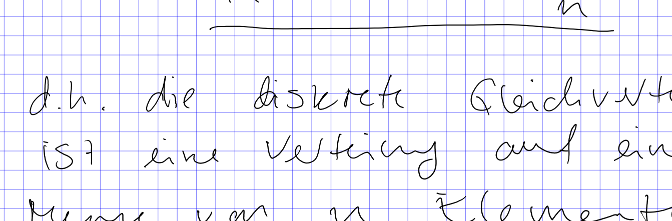
und Verteilung

$\boxed{p_X(k)}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$

d.h. $p_X(k) \ge 0$, $\sum_{k=1}^{n} p_X(k) = 1$

Sei Z eine auf dem Intervall $[0,1]$ <u>gleichverteilte</u> ZV

Konstruiere X mit Hilfe von Z. $n = 4$



allgemein: Unterteile das reelle Intervall $[0,1]$ in n Teilintervalle mit den Längen $p_X(1), \ldots, p_X(n)$

Setze $X = k$ falls Z im Intervall $[p_X(1) + \ldots + p_X(k-1), p_X(1) + \ldots + p_X(k)[$ liegt, d.h. $X = k$ falls Z im k-ten Intervall liegt

Damit ist

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(p_X(1) + \ldots + p_X(k-1) \le Z < p_X(1) + \ldots + p_X(k))$$
$$= p_X(1) + \ldots + p_X(k) - (p_X(1) + \ldots + p_X(k-1))$$
$$= p_X(k).$$

d.h. ich habe mit Hilfe von Z eine Zufallsvariable X mit der vorgegebenen Verteilung konstruiert!