

**Stochastik für die Informatik  
Hausaufgabenblatt 5**

Ausgabe: 18.11. – Abgabe: 25.11, Besprechung in den jeweiligen Tutorien (28. 11. - 02. 12.)

---

**Hausaufgabe 5.1**

3 Punkte

Es sei  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$  mit

$i$	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(\omega_i)$	1/4	1/4	1/4	1/8	1/8

Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien wie folgt definiert:

$$X(\omega_i) = \begin{cases} -1, & \text{falls } i = 1, 3 \\ +2, & \text{falls } i = 2, 4 \\ -2, & \text{falls } i = 5 \end{cases}, \quad Y(\omega_i) = \begin{cases} 4, & \text{falls } i = 1, 4, 5 \\ 2, & \text{falls } i = 2, 3 \end{cases}.$$

- Berechnen Sie die Erwartungswerte von  $X$  und  $Y$ .
- Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X^Y$ .
- Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f(x, y) = (x + y)^2$  gegeben. Berechnen Sie  $\mathbb{E}(f(X, Y))$ .

**Hausaufgabe 5.2 (Erwartete Position)**

3 Punkte

Ein Floh sitzt auf dem Ursprung der Zahlengerade  $\mathbb{Z}$  und springt jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $p$  um eine Einheit nach rechts bzw. mit Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  um eine Einheit nach links. Sei  $X_n$  die Position des Flohs nach  $n$  Sprüngen. Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X_n$ .

**Hausaufgabe 5.3 (Momente der Zipf-Verteilung)**

4 Punkte

Sei  $X$  zipfverteilt mit Parameter  $\alpha > 1$ .

- Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $\mathbb{E}(X^2)$  endlich? Bestimmen Sie  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ , falls  $\mathbb{E}(X^2)$  endlich ist.
- Für festes  $\alpha$ , bestimmen Sie die Menge

$$M_\alpha := \{\beta > 0 : \mathbb{E}[X^\beta] < \infty\}$$

und berechnen Sie  $\mathbb{E}[X^\beta]$  für  $\beta \in M_\alpha$ .

### Hausaufgabe 5.4

6 Punkte

Sei  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{E}X = \lambda$ .
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert von

$$[X]_k := X \cdot (X - 1) \cdots (X - k + 1), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- (c) Berechnen Sie damit  $\mathbb{E}X^2$  sowie  $\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .
- (d) Berechnen Sie  $\mathbb{E}(e^{uX})$  für  $u \in \mathbb{R}$ .

### Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

- Die Hausaufgabenblätter werden Freitags auf Moodle veröffentlicht und enthalten Hausaufgaben, die in der darauf folgenden Woche entweder **vor der Vorlesung am Freitag um 12:00 Uhr** in Hörsaal V abzugeben sind oder **vor Freitag 12:00 Uhr** in das Schließfach Ihres Tutors (Robert-Mayer-Straße 6-8, 3. Stock) eingeworfen werden müssen.
- Die Hausaufgaben werden anschließend in den Tutorien der nächsten Woche besprochen.