Bsp. 8.8 Seien $x_1, \dots, x_n$ Messwerte von unabhängigen, normalverteilten ZV mit $\mu = 0$ und unbekanntem $\boxed{\sigma^2}$ ← zu schätzen, also $\boxed{\vartheta = \sigma^2}$

Dichte: $f_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} e^{-\frac{x^2}{2\vartheta}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Likelihood-Funktion

$$L((x_1, \dots, x_n); \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} e^{-\frac{x_1^2}{2\vartheta}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} e^{-\frac{x_n^2}{2\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\vartheta)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2\vartheta}}$$

log-Likelihood-Funktion

$$\ell((x_1, \dots, x_n); \vartheta) = \log\left(\frac{1}{(2\pi\vartheta)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2\vartheta}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{(2\pi\vartheta)^{n/2}}\right) + \log\left(e^{-\frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2\vartheta}}\right)$$

$$= -\frac{n}{2} \log(2\pi\vartheta) - \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2\vartheta}$$

$$= \underbrace{-\frac{n}{2} \log(2\pi)} - \frac{n}{2} \log\vartheta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\vartheta}$$

Leite ab $\boxed{\text{nach } \vartheta}$

$$\ell'((x_1, \dots, x_n); \vartheta) = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{\vartheta^2}$$

$= 0$ setzen für krit. Punkt / Maximum:

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{2} \sum x_i^2 \cdot \frac{1}{\vartheta^2}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle $\boxed{\vartheta_* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$

Kandidat für den ML-Schätzer von σ^2.

Test ob Maximum: ℓ' noch einmal nach ϑ ableiten.

$$\ell''((x_1, \dots, x_n); \vartheta) = \frac{n}{2} \frac{1}{\vartheta^2} - \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{1}{\vartheta^3}$$

für ϑ^* wird dieser Ausdruck $< 0 \Rightarrow$ Maximum.

ML-Schätzer für die Varianz der Normalverteilung bei bekanntem Erwartungswert ($\mu = 0$)

$$\vartheta_* = \sigma_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

empirische Varianz:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \boxed{\frac{1}{\underline{n-1}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu}_i)^2}$$

Ausgleichsgerade / lineare Regression als Schätzproblem:

Zufallsvariablen X, Y, vermute einen linearen Zusammenhang, d.h. Ansatz

$$Y = aX + b \quad , a, b \in \mathbb{R}$$

gesucht: Schätzer für die Parameter a und b der Ausgleichsgeraden.

Betrachte "Fehler"

$$\underline{r_i} := y_i - \underline{a}x_i - \underline{b} \qquad i = 1, \dots, n$$

Abweichung der Messung von y_i vom theoretischen Wert $ax_i + b$.

<u>Minimiere</u> $\sum_{i=1}^{n} |r_i|$ bzw. $\underline{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}$

<u>Lösungsansatz</u>

1) $(\bar{\mu}_x, \bar{\mu}_y)$ auf Gerade

$$\Rightarrow \bar{\mu}_y = a\bar{\mu}_x + b$$

$$\Leftrightarrow b = \bar{\mu}_y - a\bar{\mu}_x$$

2) $\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ minimieren

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - \bar{\mu}_y + a\bar{\mu}_x)^2 =: f(a)$$

Ableiten ..... umformen ...
Test mit 2. Abl. ...

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{c_{xy}}{\sigma_x^2}}$$

Durchführung mit R mittels Befehl lm

Ausgabe: Intercept = Achsenabschnitt = b

$x = a$ Steigung

jeweils die Werte unter "Estimate" = Schätzer

Anwendung der linearen Regression:

Einfache neuronale Netze wie das sogenannte Perzeptron basieren auf diesem Ansatz.

<u>Outputgröße</u> y,
mehrere <u>Inputvariablen</u> $x^1, \dots, x^n$.
Ansatz: lineare Abhängigkeit:

$$y = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots a_n x^n \qquad (*)$$

Idee: Bestimme die Parameter $a_0, a_1, \dots, a_n$ mit Hilfe eines Trainingsdatensatzes

$y_1, \dots, y_k$ zu Input $x_1^1, \dots, x_1^n$
$x_k^1, \dots, x_k^n$

$\rightsquigarrow$ bestimme die a_j so, dass

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - (\underline{a_0} + \underline{a_1} x_i^1 + \dots + \underline{a_n} x_i^n))$$

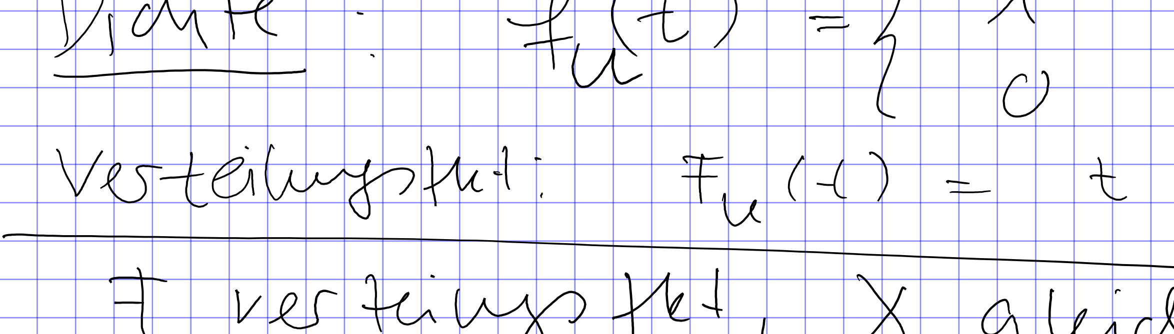
minimal wird
(mehrdimensionale Differentialrechnung

Dann Vorhersage von y für <u>neue</u> Inputvariablen $x^1, \dots, x^n$.

<u>Simulation von Zufallsvariablen</u>

Gleichverteilung auf $[0,1]$

$P(X \in [a,b]) = b - a$,
$0 < a < b < 1$



<u>Dichte</u>: $f_U(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le 1 < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$

Verteilungsfkt: $F_U(t) = t \quad 0 \le t \le 1$

F Verteilungsfkt, X gleichverteilt auf $[0,1]$

$Y = F^{-1}(X)$ <u>Beh.</u> Y hat Vert.fkt. F

$$\underline{\mathbb{P}(Y \le t)} = \mathbb{P}(F^{-1}(X) \le t)$$
$$= \mathbb{P}(X \le F(t))$$
$$= \underline{F(t)} \qquad \square$$

F Gleichverteilt auf $[0,1]$