Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

Vorlesung 6

Inhalt

- Trigonometrische Funktionen
- Grenzwerte von Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Lernziele

- Die trigonometrischen Funktionen kennen und mit ihnen rechnen können
- Grenzwerte von Funktionen bestimmen können
- Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit überprüfen können

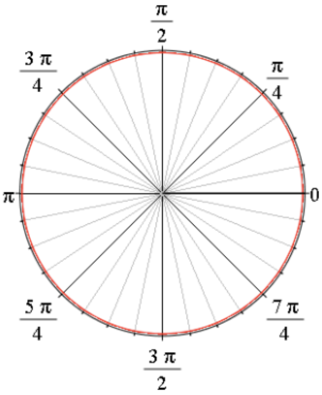
Benötigte Vorkenntnisse

- Rechenregeln, Zahlenmengen, Funktionen und Definitionsbereiche

Winkel im Bogenmaß

Bekannt: Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist gleich 2π, mit $\pi \approx 3.1415926\ldots$

Deshalb: Winkel im Bogenmaß mit Werten in $[0, 2\pi[$



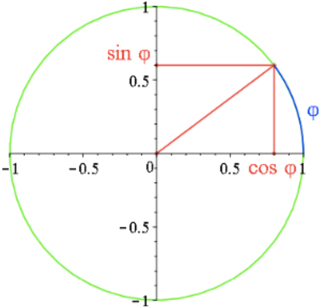
Taschenrechner: Deg↔Rad

Trigonometrische Funktionen

Kreis mit Radius 1, $x \in [0, 2\pi[$ Winkel im Bogenmaß

$\sin x$ =Länge der Gegenkathete von x, Sinusfunktion

$\cos x$ =Länge der Ankathete von x, Cosinusfunktion

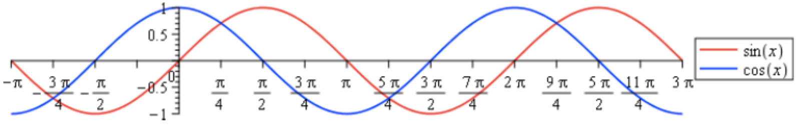


$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, Tangensfunktion

$\tan x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, Cotangensfunktion

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus: Definitionsbereiche: $\mathbb{R}$ für Sinus und Cosinus (periodische Fortsetzung). Wertebereich $[-1, 1]$.



Eigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Tangens und Cotangens: Definitionsbereiche: $\mathbb{R}$ ohne die Stellen, an denen der Nenner 0 ist. Wertebereiche: $\mathbb{R}$.

Umkehrfunktionen: arcsin, arccos, arctan, jeweils nur auf geeigneten Intervallen definiert.

Modellierung mit trigonometrischen Funktionen

Verwendung für periodische Ereignisse, z.B. Schwingungen (Physik), jährlich schwankende Wetterphänomene (Temperatur, Sonnenscheindauer...), ...

Ansatz als Sinusfunktion:

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D$$

mit A, B, C, D Parameter, welche aus den Daten zu bestimmen sind. Es gilt: B die Periodendauer (Bogenmaß), A die Amplitude (Maximum-Minimum)/2, C die Verschiebung des Nulldurchgangs, C die Verschiebung der Funktion (Maximum+Minimum)/2.
bzw. als Cosinusfunktion

$$f(x) = A \cdot \cos(B(x - C)) + D$$

(analoge Interpretation der Werte, zu berücksichtigen sind die unterschiedlichen Verschiebungen).

Grenzwerte von Funktionen

Definition Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$. Falls ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ existiert, so dass der Abstand von b zum Funktionswert $f(x)$ beliebig klein wird, falls x nah genug an a ist, so heißt b Grenzwert von f in a, Schreibweise:

$$\lim_{x \to a} f(x) = y.$$

- a muss dabei selbst nicht unbedingt im Definitionsbereich von f liegen.
- Manchmal betrachtet man nur linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte (z.B. für $a = \pm\infty$).
- Beispiele an der Tafel.

Stetigkeit

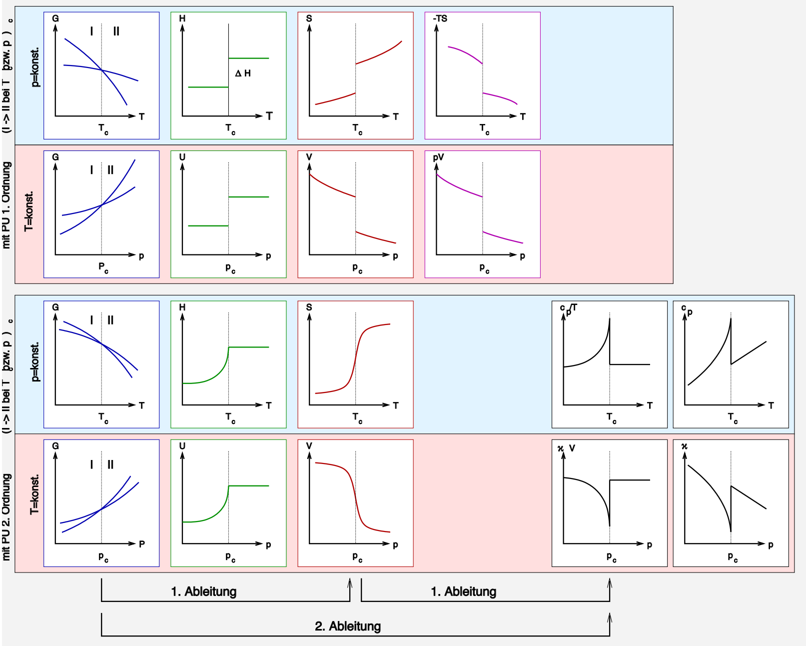
Definition Eine Funktion f ist an der Stelle $a \in D(f)$ stetig, falls der Grenzwert von f im Punkt a existiert mit

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ist f in allen Punkten einer Menge M stetig, so heißt f stetig in M. Ist f in allen Punkten seines Definitionsbereichs stetig, so heißt f stetig.

- Stetigkeit bedeutet, dass es keine abrupten nderungen der Funktionswerte gibt, keine Sprnge
- Beispiele an der Tafel
- Sind f und g in x stetig, so ist auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g in x stetig (letzteres nur, falls $g(x) \neq 0$).

Stetigkeit und Unstetigkeit - Phasenübergänge



Differenzierbarkeit

Definition Eine Funktion f ist an der Stelle $a \in D(f)$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

existiert. Ist f in allen Punkten einer Menge M differenzierbar, so heißt f differenzierbar in M. Ist f in allen Punkten seines Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

- $f'(a)$ definiert als der obige Grenzwert heißt Ableitung von f in a. Für differenzierbares f ist die Funktion f' die Ableitung.
- $f'(a)$ enspricht der Steigung oder lokalen Veränderung der Funktion f im Punkt a.
- $f''(a)$ definiert als Ableitung von f' (sofern diese existiert) ist die zweite Ableitung, sie entspricht der Krümmung von f in a.
- Ist f differenzierbar in a, so ist f dort auch stetig.
- Beispiele an der Tafel.