

# Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut\*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt  
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

# Vorlesung 6

## Inhalt

- ▶ Trigonometrische Funktionen
- ▶ Grenzwerte von Funktionen
- ▶ Stetigkeit und Differenzierbarkeit

## Lernziele

- ▶ Die trigonometrischen Funktionen kennen und mit ihnen rechnen können
- ▶ Grenzwerte von Funktionen bestimmen können
- ▶ Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit überprüfen können

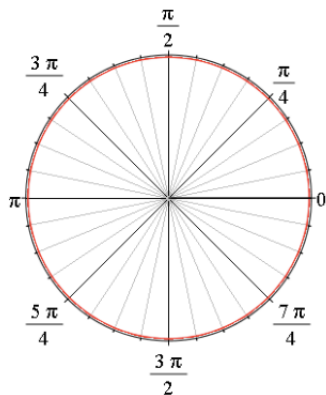
## Benötigte Vorkenntnisse

- ▶ Rechenregeln, Zahlenmengen, Funktionen und Definitionsbereiche

# Winkel im Bogenmaß

Bekannt: Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist gleich  $2\pi$ , mit  $\pi \approx 3.1415926\dots$

Deshalb: Winkel im **Bogenmaß** mit Werten in  $[0, 2\pi[$



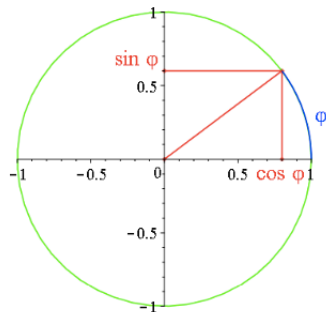
Taschenrechner: Deg $\leftrightarrow$ Rad

# Trigonometrische Funktionen

Kreis mit Radius 1,  $x \in [0, 2\pi[$  Winkel im Bogenmaß

$\sin x$  = Länge der Gegenkathete von  $x$ , Sinusfunktion

$\cos x$  = Länge der Ankathete von  $x$ , Cosinusfunktion

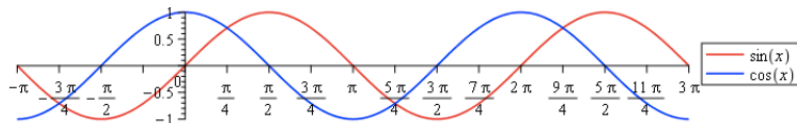


$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , Tangensfunktion

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ , Cotangensfunktion

# Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus: Definitionsbereiche:  $\mathbb{R}$  für Sinus und Cosinus (periodische Fortsetzung). Wertebereich  $[-1, 1]$ .



Eigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Tangens und Cotangens: Definitionsbereiche:  $\mathbb{R}$  ohne die Stellen, an denen der Nenner 0 ist. Wertebereiche:  $\mathbb{R}$ .

Umkehrfunktionen:  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ , jeweils nur auf geeigneten Intervallen definiert.

# Modellierung mit trigonometrischen Funktionen

Verwendung für **periodische Ereignisse**, z.B. Schwingungen (Physik), jährlich schwankende Wetterphänomene (Temperatur, Sonnenscheindauer...), ...

**Ansatz als Sinusfunktion:**

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D$$

mit  $A, B, C, D$  Parameter, welche aus den Daten zu bestimmen sind. Es gilt:  $B$  die Periodendauer (Bogenmaß),  $A$  die Amplitude (Maximum-Minimum)/2,  $C$  die Verschiebung des Nulldurchgangs,  $D$  die Verschiebung der Funktion (Maximum+Minimum)/2.  
bzw. als Cosinusfunktion

$$f(x) = A \cdot \cos(B(x - C)) + D$$

(analoge Interpretation der Werte, zu berücksichtigen sind die unterschiedlichen Verschiebungen).

# Grenzwerte von Funktionen

**Definition** Sei  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = \pm\infty$ . Falls ein Punkt  $b \in \mathbb{R}$  existiert, so dass der Abstand von  $b$  zum Funktionswert  $f(x)$  beliebig klein wird, falls  $x$  nah genug an  $a$  ist, so heißt  $b$  **Grenzwert** von  $f$  in  $a$ , Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y.$$

- ▶  $a$  muss dabei selbst nicht unbedingt im Definitionsbereich von  $f$  liegen.
- ▶ Manchmal betrachtet man nur linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte (z.B. für  $a = \pm\infty$ ).
- ▶ Beispiele an der Tafel.

# Stetigkeit

**Definition** Eine Funktion  $f$  ist an der Stelle  $a \in D(f)$  **stetig**, falls der Grenzwert von  $f$  im Punkt  $a$  existiert mit

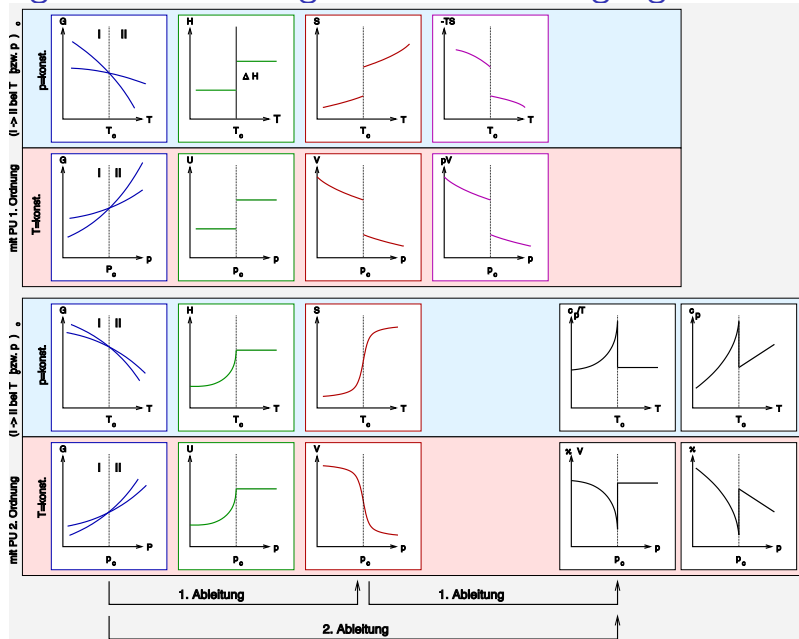
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ist  $f$  in allen Punkten einer Menge  $M$  stetig, so heißt  $f$  stetig in  $M$ . Ist  $f$  in allen Punkten seines Definitionsbereichs stetig, so heißt  $f$  stetig.

- ▶ Stetigkeit bedeutet, dass es keine abrupten Änderungen der Funktionswerte gibt, keine Sprünge
- ▶ Beispiele an der Tafel
- ▶ Sind  $f$  und  $g$  in  $x$  stetig, so ist auch  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  und  $f/g$  in  $x$  stetig (letzteres nur, falls  $g(x) \neq 0$ ).



# Stetigkeit und Unstetigkeit - Phasenübergänge



# Differenzierbarkeit

**Definition** Eine Funktion  $f$  ist an der Stelle  $a \in D(f)$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

existiert. Ist  $f$  in allen Punkten einer Menge  $M$  differenzierbar, so heißt  $f$  differenzierbar in  $M$ . Ist  $f$  in allen Punkten seines Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt  $f$  differenzierbar.

- ▶  $f'(a)$  definiert als der obige Grenzwert heißt **Ableitung** von  $f$  in  $a$ . Für differenzierbares  $f$  ist die Funktion  $f'$  die Ableitung.
- ▶  $f'(a)$  entspricht der **Steigung** oder lokalen Veränderung der Funktion  $f$  im Punkt  $a$ .
- ▶  $f''(a)$  definiert als Ableitung von  $f'$  (sofern diese existiert) ist die zweite Ableitung, sie entspricht der **Krümmung** von  $f$  in  $a$ .
- ▶ Ist  $f$  differenzierbar in  $a$ , so ist  $f$  dort auch stetig.
- ▶ Beispiele an der Tafel.