Stochastik für die Informatik, Vorlesung 3

Inhalt

- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit
- Mehrstufige Experimente

Lernziele

- den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen und damit rechnen können
- Mit mehrstufigen Experimenten arbeiten können
- Die Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit anwenden können

Vorkenntnisse

- Stoff der ersten beiden Vorlesungen

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Beispiel 2.1) Würfeln mit einem fairen Würfel, $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Wir wissen:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = ... = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Nun würfeln wir verdeckt, und jemand sagt uns, dass die gewürfelte Zahl gerade ist.

Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten unter dieser Zusatzinformation?

Es müssen neue Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\mathbb{P}}$ für die neue Situation bestimmt werden. Intuition, bzw. Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

und

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Def. 2.1) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für A gegeben B ist definiert als

$$\boxed{\mathbb{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

- Die Formel ist nicht symmetrisch, A und B haben unterschiedliche Rollen.
- (Beispiel 2.2: Würfeln unter Zusatzinformation)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für jedes $B \subseteq \Omega$ ist $\mathbb{P}(\cdot \,|\, B) : A \mapsto \mathbb{P}(A \,|\, B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (vgl. Vorlesung 2).

- (Beispiel 2.3: Ausfallwahrscheinlichkeit/Sterbewahrscheinlichkeit)

Lebenserwartung/Sterbewahrscheinlichkeit

8 National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, April 19, 2006

Table 1. Life table for the total population: United States, 2003

Click here for spreadhseet version

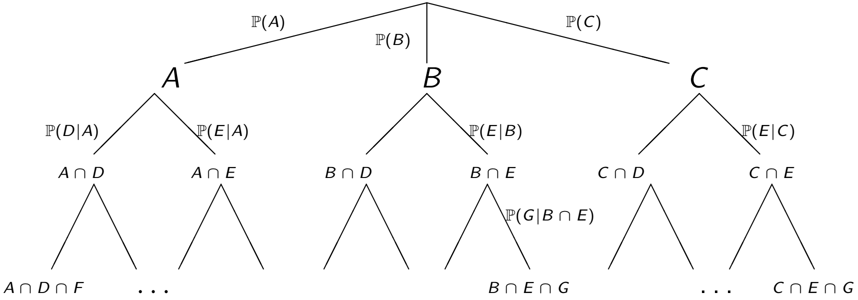
Age	Probability of dying between ages x to $x+1$	Number surviving to age x	Number dying between ages x to $x+1$	Person-years lived between ages x to $x+1$	Total number of person-years lived above age x	Expectation of life at age x
	$q(_x)$	$l(_x)$	$d(_x)$	$L(_x)$	$T(_x)$	$e(_x)$
0–1	0.006865	100,000	687	99,394	7,743,016	77.4
1–2	0.000469	99,313	47	99,290	7,643,622	77.0
2–3	0.000337	99,267	33	99,250	7,544,332	76.0
3–4	0.000254	99,233	25	99,221	7,445,082	75.0
4–5	0.000194	99,208	19	99,199	7,345,861	74.0
5–6	0.000177	99,189	18	99,180	7,246,663	73.1
6–7	0.000160	99,171	16	99,163	7,147,482	72.1
7–8	0.000147	99,156	15	99,148	7,048,319	71.1
8–9	0.000132	99,141	13	99,134	6,949,171	70.1
9–10	0.000117	99,128	12	99,122	6,850,036	69.1
10–11	0.000109	99,116	11	99,111	6,750,914	68.1
11–12	0.000118	99,105	12	99,100	6,651,803	67.1
12–13	0.000157	99,094	16	99,086	6,552,704	66.1
13–14	0.000233	99,078	23	99,067	6,453,618	65.1
14–15	0.000339	99,055	34	99,038	6,354,551	64.2
15–16	0.000460	99,022	46	98,999	6,255,513	63.2
16–17	0.000577	98,976	57	98,947	6,156,514	62.2
17–18	0.000684	98,919	68	98,885	6,057,566	61.2
18–19	0.000769	98,851	76	98,813	5,958,681	60.3
19–20	0.000832	98,775	82	98,734	5,859,868	59.3

Mehrstufige Experimente

Zufallsexperimente, welche in mehreren Schritten ablaufen, können in Baumform dargestellt werden:

- Knoten des Baumes: Ergebnisse der jeweiligen Stufe
- Kanten ("Äste") des Baumes: bedingte Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Ausgangs, gegeben das Ergebnis der vorherigen Stufe
- "Blätter" des Baumes: Endergebnis des Experiments entsprechend der Zwischenergebnisse

Mehrstufige Experimente: Baumdarstellung



Mehrstufige Experimente: Multiplikationsregel

Umformen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit führt auf

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B),$$

$A, B \subseteq \Omega$. Daraus folgt:

Multiplikationsregel: In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste, die zum Blatt mit diesem Ergebnis führen.

- (Beispiel 2.4, 2.5: Test auf Krankheit)
- (Beispiel: Urnenmodelle)

Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit

(Satz 2.1) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

- (Beweis siehe Vorlesung)
- (Beispiel 2.6: Test auf Krankheit (Fortsetzung))

Mehrstufige Experimente: Additionsregel

Die Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit kann auch anders formuliert werden:

Additionsregel: In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis durch Addition der entsprechenen Einzelwahrscheinlichkeiten der Ergebnisse auf den Blättern des Baumes, welche in das Ereignis eingehen.

(Skizze siehe Vorlesung)

Allgemeine Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, ..., B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Disjunkte Zerlegung bedeutet dabei $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für alle $i = 1, ..., n$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

(Besipiel 2.7: Signalübermittlung durch mehrere Kanäle)

Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit