Stochastik für die Informatik, Vorlesung 4

Inhalt

- Unabhängigkeit von Ereignissen
- Bayes-Formel

Lernziele

- Unabhängigkeit von Ereignissen bestimmen können und um die Bedeutung wissen
- Die Bayes-Formel kennen und damit rechnen können

Vorkenntnisse Wie bisher

Erinnerung: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A gegeben B:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

"Wahrscheinlichkeit für A unter der Zusatzinformation dass B eingetreten ist."

(Satz 2.1: Formel für die Gesamtwahrscheinlichkeit) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse, mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Allgemeine Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A ein Ereignis. Sei $B_1, ..., B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Disjunkte Zerlegung bedeutet dabei $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für alle $i = 1, ..., n$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

(Besipiel 2.7: Signalübermittlung durch mehrere Kanäle)

Mehrstufige Experimente

Mehrstufige Experimente: Baumdarstellung, auf den Ästen stehen die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

- "Multiplikationsregel": Umformulierung der Definition der Bedingten Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit für einzelne Ergebnisse berechnet sich durch Multiplikation entlang der Äste,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$$

- "Additionsregel": Umformulierung der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit für Ereignisse bestehend aus mehreren Endergebnissen berechnet sich durch Addition entlang der Blätter.

Bayes-Formel

Angenommen wir können $\mathbb{P}(A \mid B)$ (leicht) berechnen, interessieren uns aber eigentlich für $\mathbb{P}(B \mid A)$.

(Satz 2.3: Bayes-Umkehrformel) Seien A, B Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

- (Beweis)
- (Beispiel 2.11: Test auf Krankheit, Fortsetzung)
- (Vererbung von Farbenblindheit, Fortsetzung)

Bayes-Formel

(Satz 2.4 Allgemeine Bayes-Umkehrformel) Seien $A, B_1, ..., B_n$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(B_i) > 0 \, \forall i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} = \frac{P(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

- (Beispiel 2.12: Signalübertragung)

Unabhängige Ereignisse

(Def. 2.2) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B heißen unabhängig, falls

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

gilt.

- Unabhängigkeit bedeutet, dass das Eintreten von A nicht durch das Eintreten von B beeinflusst wird (und umgekehrt)
- (Beispiel 2.8, Fortsetzung)

Unabhängige Ereignisse

(Satz 2.2) Zwei Ereignisse A und B auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}(A \,|\, B) = \mathbb{P}(A)$ gilt.

- (Beweis)
- Vorsicht: Unabhängig ist nicht gleichbedeutend mit disjunkt! (eher im Gegenteil)

Unabhängigkeit von n Ereignissen

(Def. 2.3) Seien $A_1, ..., A_n \subseteq \Omega$ Ereignisse. Die n Ereignisse heißen unabhängig, falls für alle $2 \leq k \leq n$ und Indizes $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}, i_l \neq i_j$ für $l \neq j$ gilt

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).}$$

Beispiel: Unabhängigkeit von drei Ereignissen A, B, C. Diese sind genau dann unabhängig, wenn alle folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

und

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Beispiel 2.10: Leitungssystem