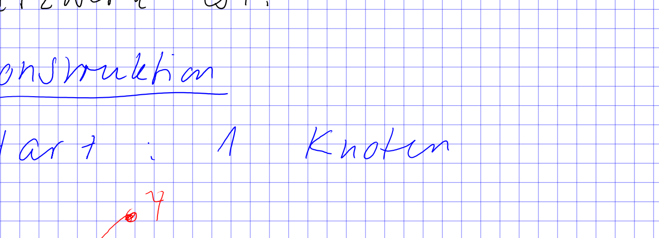
# Preferential attachment Modell

dynamische Konstruktion, deren Ergebnis ein Beispiel für ein sogenanntes skalenfreies Netzwerk ist.

## Konstruktion

Start: 1 Knoten




- füge einen 2. Knoten hinzu und verbinde mit dem vorhanden
- 3 Knoten, verbinde mit einem bereits vorhanden
- 4. Knoten: 1. hat 2 ~~Verbindungen~~ Nachbarn, 2. und 3. haben jeweils 1 Nachbarn

Wähle als Nachbarn für den 4. Knoten:

- Knoten Nr. 1 mit Wahrsch. $\frac{2}{4}$
- Knoten Nr. 2 mit Wahrsch. $\frac{1}{4}$
- Knoten Nr 3 mit Wahrsch. $\frac{1}{4}$

Falls aktuell $n$ Knoten vorhanden sind, wähle ich den Nachbarknoten für den $n+1$. Knoten zufällig aus den bereits vorhandenen Knoten aus, mit einer Wahrsch. die proportional zur Zahl der bereits vorhandenen Kanten pro Knoten sind

$\rightsquigarrow$ je mehr Verbindungen ein Knoten hat, desto wahrscheinlicher ist es, dass es noch mehr Verb. bekommt.

## Bsp. Erwartungswert

1) fairer Würfel $X$ Ergebnis beim einfachen Würfeln.

$X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6)$$

$$= \frac{21}{6} = \underline{\underline{3.5}}$$

2) Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{0, \dots, 3\}$

$\mathbb{P}(X = k)$ in einer Tabelle gegeben:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=k)$ | 0.2 | 0.1 | 0.5 | 0.2 |

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X=3)$$

$$= 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.2 = \dots = \underline{\underline{1{,}7}}$$

Bsp. Sei $X$ Zipf-verteilt mit Parameter $\underline{a > 1}$

$0 < Z(a) = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}} < \infty$

ist eine endliche Zahl, die sogenannte Normierung

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ (nat. Zahlen ohne 0)

Erwartungswert von $X$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ = X(\Omega)}} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \frac{k^{-a}}{Z(a)}$$

$$= \frac{1}{Z(a)} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k^{-a}$$

$$= \frac{1}{Z(a)} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k^a}$$

$$= \frac{1}{Z(a)} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-a}}_{\text{Frage: konvergiert diese unendliche Reihe?}} = \frac{1}{Z(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a-1}}$$

Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $a - 1 > 1$, d.h. wenn $\boxed{a > 2}$

Also: Der Erwartungswert einer Zipf-verteilten ZV ist genau dann endlich, wenn $a > 2$.

Bem. Man sagt, der Erwartungswert einer ZV $X$ existiert falls $\sum_{k \in X(\Omega)} |k| \cdot \mathbb{P}(X = k) < \infty$

also: Falls $X(\Omega)$ endlich ist, existiert der Erw. Wert immer

Beispiel: Erwartungswert von Bernoulli- und Binomialverteilung

$X \sim Ber(p) \qquad X(\Omega) = \{0, 1\}$

$\mathbb{P}(X = 1) = p$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}[X]}} = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1)$$

$$= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = \underline{\underline{p}}$$

Sei jetzt $Y$ binomialverteilt mit Parametern $n$ und $p$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k \in Y(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= ?$$

Trick: $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei die $X_i$ $Ber(p)$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}[Y]}} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{= p} = \sum_{i=1}^{n} p$$

Linearität des Erwartungswerts

$$= \underline{\underline{n \cdot p}}$$

d.h. der Erwartungswert einer binomialverteilten ZV mit Parametern $n, p$ ist gleich $\boxed{n \cdot p}$

---

Bsp: $\mathbb{E}[X^2]$, wenn

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=k)$ | 0.2 | 0.1 | 0.5 | 0.2 |

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{3} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$= 0^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X=3)$$

$$= 0 + 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0.5 + 9 \cdot 0.2$$

$$= \dots$$