Bsp. Sei X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, p(1-p)^{k-1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

Anwendung: Bildchensammelproblem

Fußballbilder: In jeder Packung ist eins von n verschiedenen Bildern ($n=35$).

Frage: Wie viele Packungen muss ich im Mittel kaufen (zufällig) um am Ende jedes Bild mindestens einmal zu haben?

Stochastische Modellierung:

$X :=$ Anzahl Packungen, die ich kaufen muss

gesucht: Erwartungswert von X

$X_k :=$ Anzahl Packungen, die ich kaufen muss, um ein neues Bild zu bekommen, wenn ich aktuell $k-1$ verschiedene Bilder bereits habe.

$X_1 = 1$

$X_k \sim Geo\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$,

denn es gibt $n-(k-1) = n-k+1$ Bilder, die ich noch nicht habe, und n Bilder insgesamt; es kommt also mit Wahrsch. $p_k = \frac{n-k+1}{n}$ ein neues Bild dazu, wenn ich eine Packung kaufe.

$$\boxed{X = \sum_{k=1}^{n} X_k} \qquad X_k \sim Geo\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}[X]}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] \overset{\downarrow}{=} \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\underbrace{n-k+1}_{\ell}}}$$

$$= n \cdot \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}}_{H(n) \approx \ln(n)} \approx \underline{\underline{n \cdot \ln(n)}}$$

$\underline{n=35}$ $\quad \underline{\underline{\ln(35) \approx 3{,}55 \ldots}}$

$n \cdot \ln(n) \approx 124$ für $n=35$

Randomisiertes Quicksort

Worst case: Y immer das aktuell kleinste Element

1. Schritt $\quad n-1$ Vergleiche $\rightarrow S_< = \emptyset$, $S_> = S\setminus\{Y\}$

2. Schritt $\quad n-2$

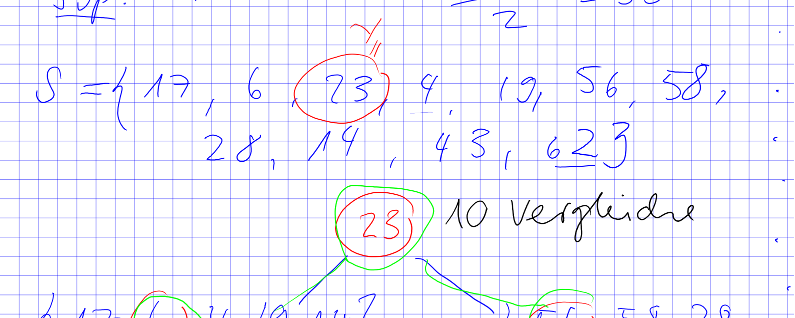
$\vdots$

$$\underline{X_S} = (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{(n-1)\cdot n}{2} \approx \underline{\frac{n^2}{2}}$$

Besser: Element aus der Mitte der geordneten Liste

Bsp. $n=11$ $\qquad \frac{n(n-1)}{2} = 55$

$S = \{17, 6, 23, 4, 19, 56, 58, 28, 14, 43, 62\}$ (Y = 23)



Anzahl Vergl. $10+4+4+2+1+1 = \underline{22} < \underline{55}$

Erwartete Laufzeit

Zufallsvariable:

$X_n =$ Anzahl Vergleiche von 2 Zahlen

Beweis von Satz 12.1

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Seien $s_{(1)}, \ldots, s_{(n)}$ die Elemente von S in der richtigen Reihenfolge

d.h. $s_{(1)}$ das kleinste

$s_{(i)}$ das i-t kleinste Element.

Sei $A_{ij} := \{$es kommt zu einem Vergleich von $s_{(i)}$ und $s_{(j)}\}$

Für $i<j$ ist

$$\mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{2}{j-i+1} \qquad (*)$$

[Warum gilt $(*)$?

A_{ij} tritt genau dann ein, wenn entweder $s_{(i)}$ oder $s_{(j)}$ als erstes der Elemente $\overbrace{s_{(i)}, s_{(i+1)}, \ldots, s_{(j-1)}, s_{(j)}}^{j-i+1}$ als Vergleichselement Y gewählt wird.

$$\mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{2}{j-i+1}$$]

Es gilt

$$\boxed{X_n = \sum_{(i,j):\, 1\le i<j\le n} 1_{A_{ij}}}$$

$$\underline{\mathbb{E}[X_n]} = \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j):\, 1\le i<j\le n} 1_{A_{ij}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1_{A_{ij}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[1_{A_{ij}}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(0 \cdot \mathbb{P}(\overline{A_{ij}}) + 1 \cdot \mathbb{P}(A_{ij})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{2}{k}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \approx \boxed{2 \cdot n \cdot \ln(n)}$$

[für n groß]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n)$$

Beispiel Erwartungswert

X ZV mit $X(\Omega) = \{-1, 1\}$

$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = 1/2$

$$\mathbb{E}[X] = (-1) \cdot \mathbb{P}(X=-1) + 1\,\mathbb{P}(X=1) = 0$$

Y mein Gewinn nach 5 Spielen

$Y = X_1 + \ldots + X_5$, $\quad X_i$ alle wie X verteilt

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 0$$

$$\mathbb{E}[X^2] = (-1)^2 \mathbb{P}(X=-1) + (1)^2 \mathbb{P}(X=1)$$

$X^2 = 1$

$$= \underline{1}$$

Varianz

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right]$$

Binom. Formel

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X \cdot \mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X])^2\right]$$

Linearität $\mathbb{E}$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \overbrace{\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X]}^{\mathbb{E}[X]^2} + \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \underline{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2} \qquad \square$$

Beispiel: Varianz der Bernoulli-Verteilung:

$X \sim Ber(p)$ $\qquad X(\Omega) = \{0,1\}$

$\mathbb{P}(X=1) = p$

wissen: $\mathbb{E}[X] = p$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1)$$

$$= \mathbb{P}(X=1) = p$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{V}(X)}} = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$$

$$= \underline{\underline{p(1-p)}}$$