X = Summe der 2 Kugeln

Y = Minimum

$X(\Omega) = \{2, \dots, 8\}$

$Y(\Omega) = \{1, \dots, 4\}$

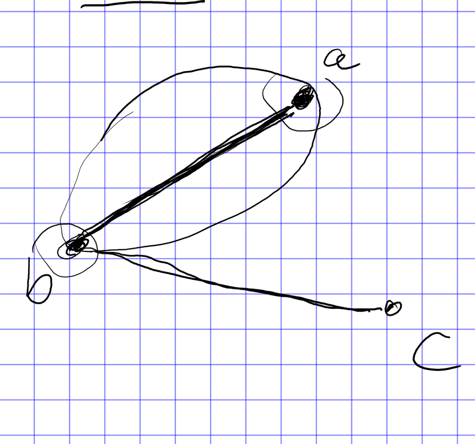
$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0$

$\mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}(X=3, Y=1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

Bsp: Erdős-Rényi-Zufallsgraph

$k=3$, p 3 Knoten



3 "Mögliche" Kanten, welche mit Wahrsch. p vorhanden sind und $1-p$ nicht vorhanden!

X = Anzahl Kanten von a, welche vorhanden sind

Y = Anzahl Kanten von b

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\} = Y(\Omega)$

Gemeinsame Verteilung von X und Y

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$(1-p)^3$	$(1-p)^2 p$	0
1	$(1-p)^2 p$	$p(1-p)^2 + p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$
2	0	$p^2(1-p)$	p^3

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = (1-p)^3$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = (1-p)^2 \cdot p$
$= \mathbb{P}(X=1, Y=0)$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = p(1-p)^2 + (1-p)p^2$

Kante von a nach b vorhanden und die anderen nicht

Kante von a nach b nicht, die anderen schon

Faltungsformel   Beweis

$(X+Y)(\Omega) = \{k = m + \ell : m \in X(\Omega), \ell \in Y(\Omega)\}$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{m \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=m, X+Y=k)$$

Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit $\sum_{m \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=m) = 1$

$$= \sum_{m \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=m, Y=k-m)$$

$$\underset{X, Y \text{ unabhängig}}{=} \sum_{m \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=m) \cdot \mathbb{P}(Y=k-m)$$

$\square$

Beispiel:

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$

X und Y unabhängig

Ges. Verteilung von $X+Y$: Sei $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) \underset{\text{Faltungsformel}}{=} \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}(X=m) \cdot \mathbb{P}(Y=k-m)$$

$$\underset{X, Y \text{ Poisson}}{=} \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \cdot \frac{\mu^{k-m} e^{-\mu}}{(k-m)!}$$

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \underbrace{e^{-\lambda} e^{-\mu}}_{e^{-(\lambda+\mu)}} \lambda^m \mu^{k-m} \frac{\binom{k}{m}}{k!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \lambda^m \mu^{k-m} \binom{k}{m}}_{(\lambda+\mu)^k \text{ dank dem Binom. Lehrsatz}}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^k}{k!}$$

$= \mathbb{P}(Z=k)$, wenn $Z \sim \text{Poiss}(\lambda+\mu)$

Zur Berechnung der Kovarianz

$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2\mathbb{P}(X=2)$
$= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \dots = 1$

$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \mathbb{P}(Y=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y=1) = \frac{9}{16}$

$\mathbb{E}[X \cdot Y] = ?$

$(X \cdot Y)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$\mathbb{P}(X \cdot Y = 0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0)$
$+ \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0)$
$+ \mathbb{P}(X=2, Y=0)$
$= \dots = \frac{5}{8}$

$\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X \cdot Y = 2) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{1}{8}$

$\mathbb{E}[X \cdot Y] = 0 \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = 1)$
$+ 2 \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = 2) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
$= \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}$

Beweis von (d)

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_{z \in (X \cdot Y)(\Omega)} z \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = z)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y} (x \cdot y) \cdot \mathbb{P}(X \cdot Y = x \cdot y)$$

$$\underset{\text{unabh.}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X=x) \cdot \sum_{y \in Y} y \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$. $\square$

$\mathbb{V}(X+Y)$: Spezialfall: X und Y unabh. $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \underbrace{2\operatorname{cov}(X,Y)}_{=0} + \mathbb{V}(Y)$$

$$= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Beweis dass $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$

Ansatz: $\boxed{\mathbb{V}(X+Y)} \underset{\text{Def. Var.}}{=} \mathbb{E}\left[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2\right]$.

$= \dots = \dots =$

Quadrat auflösen, Linearität des Erwartungswerts, gleiche Terme zusammenfassen

$\dots = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2$
$+ 2\mathbb{E}[X \cdot Y] - 2\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

$\boxed{= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)}$