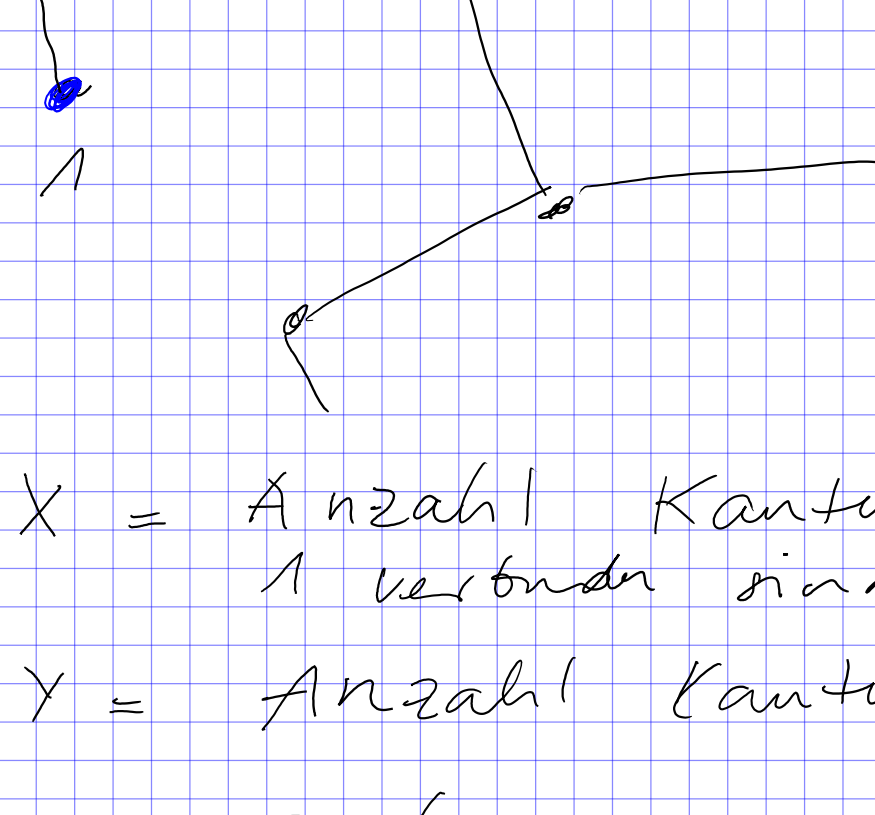


Beispiel: Kovarianz im Erdős-Rényi Zufallsgraph.

ER-Zufallsgraph, k, p vorgegeben

Wähle zwei Knoten fest aus, nenne diese 1 und 2



X = Anzahl Kanten, welche mit 1 verbunden sind

Y = Anzahl Kanten mit Knoten 2

$X \sim \text{Bin}(k-1, p)$

$Y \sim \text{Bin}(k-1, p)$

X und Y sind nicht unabhängig, denn die (mögliche) Kante zwischen 1 und 2 wird bei X und Y mitgezählt

$E[X+Y] \stackrel{\text{Linearität}}{=} E[X] + E[Y] = 2(k-1) \cdot p$
Binomialwert.

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y) = 2(k-1)p(1-p) + 2\text{cov}(X, Y)$

Die Kovarianz von X und Y müssen wir noch ausrechnen.

Trick: Schreibe $X = X_2 + X_3 + \dots + X_k$ wobei $X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls die Kante von 1 zu Knoten } i \text{ vorhanden ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$Y = Y_1 + Y_3 + Y_4 + \dots + Y_k$ wobei $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Kante von 2 nach } i \text{ vorhanden} \\ 0 & \end{cases}$

dabei muss $X_2^{(1)} = Y_1^{(2)}$ da sie dieselbe Kante beschreibt, nämlich die von $1 \rightarrow 2$.

alle anderen X_i und Y_i sind unabhängig, und auch unabh. von $X_2 (= Y_1)$

$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X_2 + X_3 + \dots + X_k, Y_1 + Y_3 + \dots + Y_k)$
 $= \text{cov}(X_2, Y_1) + \text{cov}(X_2, Y_3) + \dots + \text{cov}(X_2, Y_k)$
 $+ \text{cov}(X_3, Y_1) + \dots + \text{cov}(X_3, Y_k)$
 $+ \dots + \text{cov}(X_k, Y_k)$

$= \text{cov}(X_2, Y_1) + 0$ wegen der Unabh.
 $= \text{cov}(X_2, X_2) = V(X_2)$
 $= p(1-p)$ da X_2 Bernoulli-verteilt ist.

Somit ist $V(X+Y) = 2(k-1)p(1-p) + 2\text{cov}(X, Y) = 2(k-1)p(1-p) + 2p(1-p) = 2k p(1-p)$

$\text{cov}(X, Y) = p(1-p)$
 $\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{p(1-p)}{(k-1)p(1-p)} = \frac{1}{k-1}$
 k die Anzahl Knoten

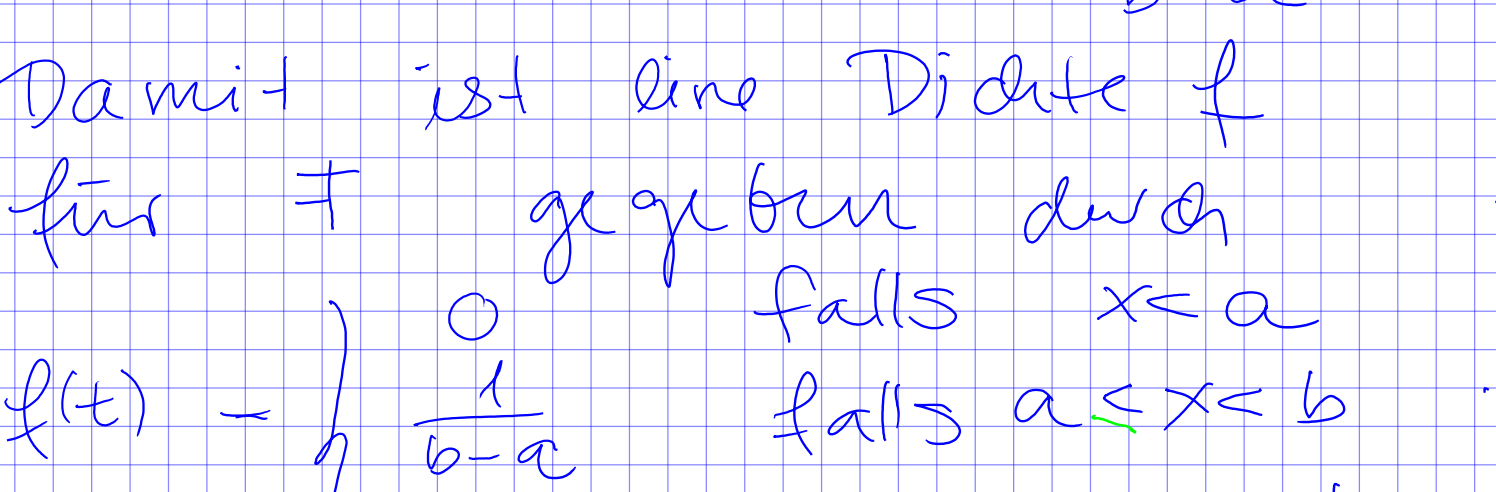
Kap 6: Dichten

Falls f eine stetige Dichte, dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$| f(x) = F'(x) |$

denn F ist die Stammfkt. von f .

Bsp. 6.6



F ist nicht differenzierbar in a und b , aber stückweise differenzierbar

auf $]-\infty, a[$: $F'(x) = 0$

auf $]b, \infty[$: $F'(x) = 0$

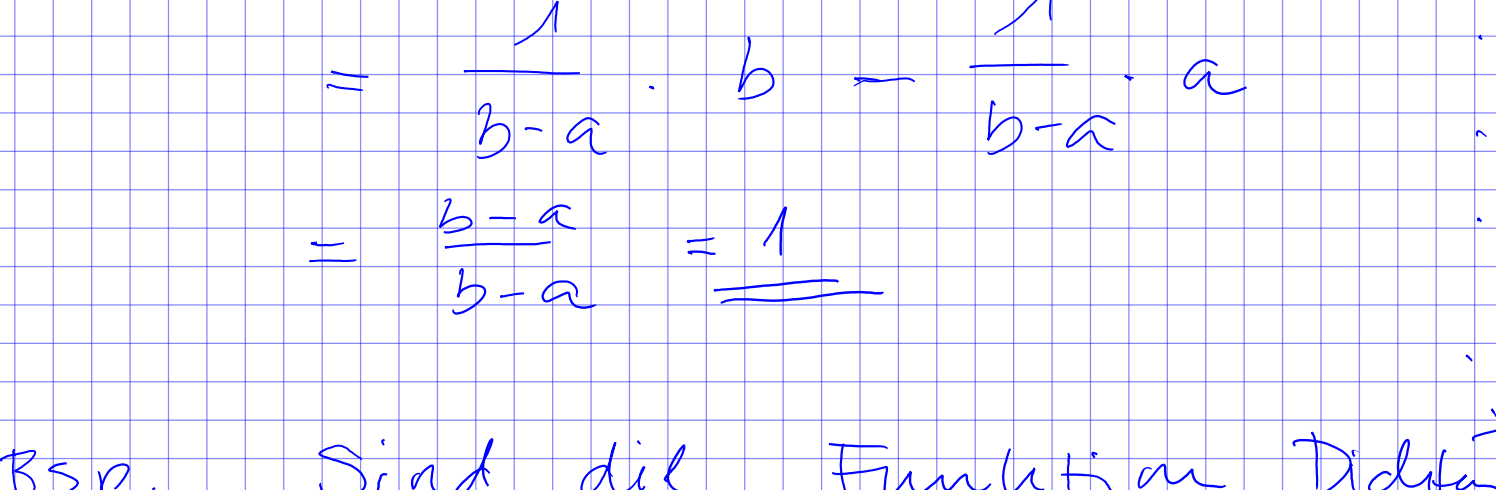
auf $]a, b[$: $F'(x) = \frac{1}{b-a}$

Damit ist line Dichte f für F gegeben durch

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \leq x < b \\ 0 & \text{falls } x \geq b \end{cases}$

ergänze f in a und b so, dass f rechtsstetig wird (Konvention)

Skizze von $\frac{1}{b-a}$



Kontrolle: überprüfe, dass f line Dichte ist:

i) $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ✓

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^{\infty} 0 dt = 0 + \left[\frac{1}{b-a} \cdot t \right]_a^b + 0 = \frac{1}{b-a} \cdot b - \frac{1}{b-a} \cdot a = \frac{b-a}{b-a} = 1$

f ist also keine Dichte

2) $f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t^3 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

i) $f_2(t) \geq 0$ ✓

$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt = \int_0^2 \frac{1}{4} t^3 dt = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{t^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{16} - 0 = 1$

diese F_2 ist eine Dichte