Bernoulli-verteilt: $X(U) = 1_{\{U \le p\}}$

Beh. $X(U)$ ist Bernoulli-verteilt

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(U \le p) = F_U(p) = p$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

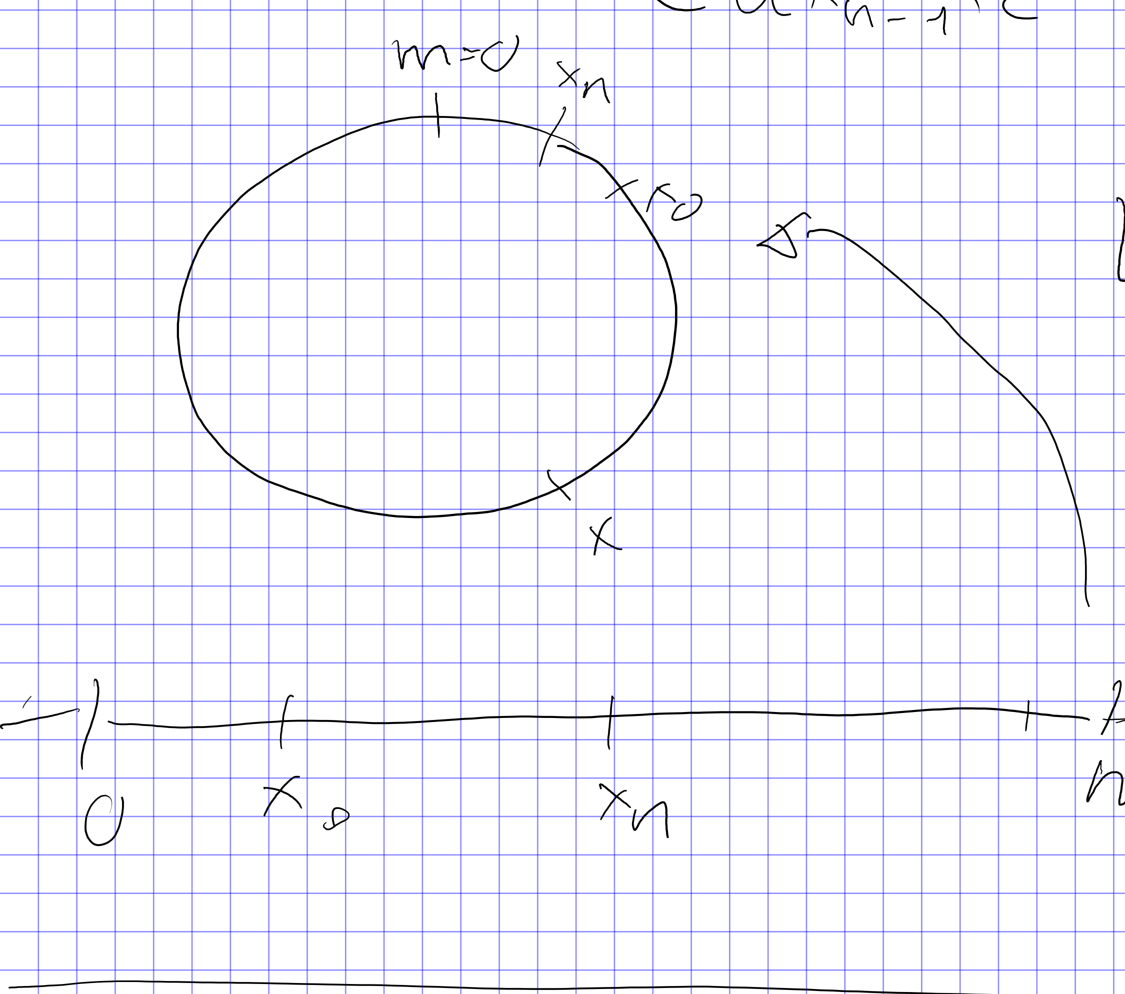
Binomialverteilung: Simuliere n unabhängige Bernoulli-p-verteilte ZV. X_i, $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$.

$$x_n = (a x_{n-1} + c) \mod m$$

bedeutet:

$$\underline{x_n} = \begin{cases} \underline{a x_{n-1} + c} & \text{falls } a x_{n-1} + c < m \\ a x_{n-1} + c - \lfloor (a x_{n-1} + c)/m \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$$



$\lfloor \cdot \rfloor$ ganzzahliger Teil

Monte-Carlo-Schätzung:

$[0,1]^d = \{(x_1,\dots,x_d) : x_i \in [0,1], i=1,\dots,d\}$.

$[0,1]^2$

Gleichverteilung auf $[0,1]^d$, $d \ge 2$

<u>Def</u>: Eine Zufallsvariable X mit Werten in $[0,1]^d$ heißt <u>gleichverteilt</u> falls $\forall A \subseteq [0,1]^d$: $\mathbb{P}(X \in A) = vol(A)$

<u>Satz</u>: Seien $X_1,\dots,X_d$ unabhängig auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV. Dann ist $X=(X_1,\dots,X_d)$ gleichverteilt auf $[0,1]^d$.

Erwartungstreue des Monte-Carlo-Schätzers:

$$\mathbb{E}\left[\underline{\hat{\mathbb{P}}(A)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i \in A\}}\right]$$

Linearität $\rightarrow$ $$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\underbrace{1_{\{U_i \in A\}}}\right]$$

Def. Erwartungswert $\rightarrow$ $$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 \cdot \mathbb{P}(1_{\{U_i \in A\}} = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(1_{\{U_i \in A\}} = 0)\right)$$

Def. Indikatorfkt $\rightarrow$ $$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(U_i \in A)}_{=\mathbb{P}(U_1 \in A)}$$

$$= \underline{\mathbb{P}(U_1 \in A)}$$

Konsistenz folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen. $\square$

$$f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\overline{\int_0^1 h(x)\,dx}} = \int_0^1 h(x) \cdot 1\,dx + \int_{-\infty}^{0} h(x) \cdot 0 \cdot dx + \int_1^{\infty} h(x) \cdot 0 \cdot dx$$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_U(x)\,dx}$$

$$= \mathbb{E}[h(U)] \quad U \sim unif[0,1]$$

Monte-Carlo-Schätzer $\rightarrow$ $$\approx \hat{\mathbb{E}}[h(U)] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i)}$$

$$\hat{I}(n) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i), \quad U_i \sim unif[a,b]$$

ist ein Monte-Carlo-Schätzer für

$$\int_a^b h(x)\,dx$$

<u>Bsp.</u> $$\int_0^1 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^1 = \underline{1}$$

Monte-Carlo-Schätzer: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3u_i^2$

u_i unabh. $unif[0,1]$

$\rightsquigarrow n = 100$, $u_1,\dots,u_{100}$ Pseudo-Zufallszahlen aus R.