Stochastik für die Informatik, Vorlesung 20

Inhalt

- Konfidenzbereiche
- t-Verteilung und χ^2-Verteilung
- Fehler 1. und 2. Art, $p-$Wert
- Hypothesentests

Lernziele

- Konfidenzbereiche in wichtigen Beispielen berechnen können
- Die t-Verteilung und die χ^2-Verteilung sowie deren Auftreten kennen
- Fehler 1. und 2. Art kennen
- $p-$Werte kennen und interpretieren können

Vorkenntnisse Parameterschätzung, Verteilungen, Konfidenzbereiche, Normalverteilung

Konfidenzbereiche

(Def. 9.1) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, deren Verteilung von einem Parameter $\theta \in \Theta$ abhängt. Sei $\alpha \in (0,1)$ vorgeben. Ein Konfidenzbereich für den Parameter θ zum Fehlerniveau α ist eine Menge $J = J(X_1, ..., X_n)$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta(J \ni \theta) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes } \theta \in \Theta$$

gilt. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_\theta$ die Wahrscheinlichkeit unter dem Parameterwert θ.

(Satz 9.1) Ein Konfidenzintervall zum Fehlerniveau α für den Erwartungswert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 und n unabhängigen Messungen ist gegeben durch

$$J = J(n, \alpha, \sigma) = [\bar{\mu}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\mu}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

wobei $z_{1-\alpha/2}$ das Quantil der Normalverteilung ist, und $\bar{\mu}_n$ das empirische Mittel.

- Gilt n̈herungsweise auch, falls die X_i nicht normalverteilt sind (zentraler Grenzwertsatz).

χ^2-Verteilung

(Def. 9.3) Eine Zufallsvariable X ist χ^2-verteilt, bzw. folgt einer χ^2-Verteilung mit Parameter $n \in \mathbb{N}$, wenn sie die Dichte

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

hat. Dabei ist Γ die sogenannte Gamma-Funktion, welche für Werte der Form $n/2, n \in \mathbb{N}$ rekursiv aus $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ für alle $r \in [0, \infty[$ berechnet werden kann.
(Satz 9.3) Seien $Y_1, ..., Y_n$ unabhänigige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann folgt die Zufallsvariable

$$Y_1^2 + ... + Y_n^2$$

einer χ^2-Verteilung mit Parameter n.

- (ohne Beweis)

Konfidenzintervall für die Varianz der Normalverteilung

(Satz 9.5) Seien $x_1, \ldots, x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für σ^2 erhält man als

$$J = \left[\bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

wobei $\bar{\sigma}_n^2$ die empirische Varianz ist, und $\chi^2_{n-1,\beta}$ das $\beta-$Quantil der χ^2-Verteilung mit Parameter $n-1$.

- (ohne Beweis; ähnlich wie für Satz 9.8, via Ansatz und Umformungen, welche den Satz 9.11 verwenden)
- Vorsicht: Parameter der χ^2-Verteilung ist in diesem Fall $n-1$ und nicht n
- Vorsicht: χ^2-Verteilung ist nicht symmetrisch, deshalb kann $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ nicht direkt aus $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ berechnet werden

Konfidenzintervall für die Varianz der Normalverteilung

(Satz 9.5) Seien $x_1, ..., x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für σ^2 erhält man als

$$J = \left[\bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \bar{\sigma}_n^2 \cdot \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

wobei $\bar{\sigma}_n^2$ die empirische Varianz ist, und $\chi^2_{n-1,\beta}$ das $\beta-$Quantil der χ^2-Verteilung mit Parameter $n-1$.

- (ohne Beweis; ähnlich wie für Satz 9.8, via Ansatz und Umformungen, welche den Satz 9.11 verwenden)
- Vorsicht: Parameter der χ^2-Verteilung ist in diesem Fall $n-1$ und nicht n
- Vorsicht: χ^2-Verteilung ist nicht symmetrisch, deshalb kann $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ nicht direkt aus $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ berechnet werden

Quantile der χ^2-Verteilung

$\chi^2_{n,\beta}$ mit $\mathbb{P}(X \leq \chi^2_{n,\beta}) = \beta$ für eine χ^2-verteilte Zufallsvariable X mit Freiheitsgrad n.

n \ β	0.9	0.95	0.975	0.99
1	2,71	3,84	5,02	6,63
2	4,61	5,99	7,38	9,21
3	6,25	7,81	9,35	11,34
4	7,78	9,49	11,14	13,28
5	9,24	11,07	12,83	15,09
6	10,64	12,59	14,45	16,81
7	12,02	14,07	16,01	18,48
8	13,36	15,51	17,53	20,09
9	14,68	16,92	19,02	21,67
10	15,99	18,31	20,48	23,21
11	17,28	19,68	21,92	24,73
12	18,55	21,03	23,34	26,22
13	19,81	22,36	24,74	27,69
14	21,06	23,68	26,12	29,14
15	22,31	25,00	27,49	30,58
16	23,54	26,30	28,85	32,00
17	24,77	27,59	30,19	33,41
18	25,99	28,87	31,53	34,81
19	27,20	30,14	32,85	36,19
20	28,41	31,41	34,17	37,57
25	34,38	37,65	40,65	44,31
30	40,26	43,77	46,98	50,89
40	51,81	55,76	59,34	63,69
50	63,17	67,50	71,42	76,15
100	118,50	124,34	129,56	135,81

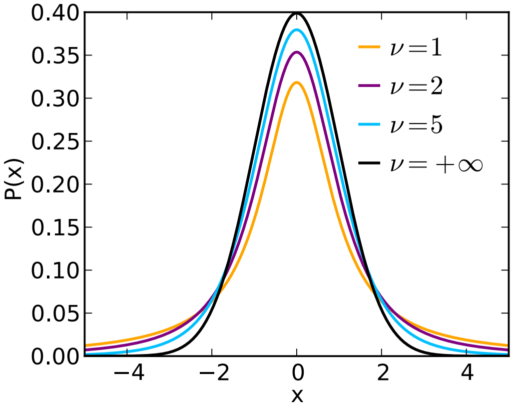
$t-$Verteilung

(Def. 9.4) Eine Zufallsvariable X heißt t-verteilt zum Parameter $n \in \mathbb{N}$, falls sie die Dichte

$$f_n(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-(n+1)/2}$$

hat. Dabei ist Γ wieder die Gamma-Funktion.

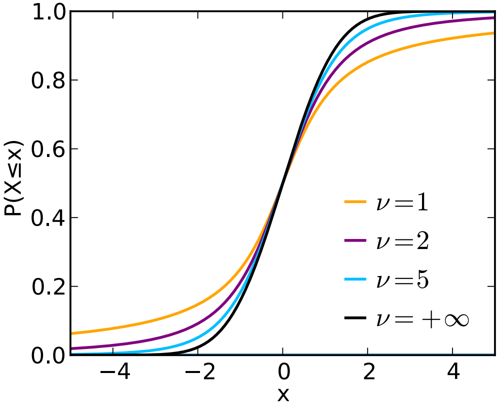
$t-$Verteilung



- Normalverteilung für $n \to \infty$
- Die Verteilungsfunktion und die Quantile der $t-$Verteilung sind in Tabellen aufgelistet.

$t-$Verteilung

Verteilungsfunktion:



t-Verteilung

(Satz 9.4) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Seien $\bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n)$ und $\bar{\sigma}_n(X_1, ..., X_n)$ das empirische Mittel bzw. die empirische Standardabweichung dieser Zufallsvariablen. Dann folgt die Zufallsvariable

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\mu}_n(X_1, ..., X_n) - \mu)}{\bar{\sigma}_n(X_1, ..., X_n)}$$

einer t-Verteilung mit Parameter $n - 1$.

Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung

(Satz 9.6) Seien $x_1, ..., x_n$ Messwerte von Realisierungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Das Konfidenzintervall für μ erhält man als

$$J = \left[\bar{\mu}_n - \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, \bar{\mu}_n + \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right]$$

wobei $\bar{\mu}_n$ das empirische Mittel, $\bar{\sigma}_n$ die Wurzel aus der empirischen Varianz, und $t_{n-1,1-\alpha/2}$ das Quantil der $t-$Verteilung mit Parameter $n-1$ ist.

- Faustregel: Für $n > 30$ kann die $t-$Verteilung durch die Normalverteilung approximiert werden.

Quantile der $t-$ *Verteilung*

$t_{n,\beta}$ mit $\mathbb{P}(X \leq t_{n,\beta}) = \beta$ für eine $t-$verteilte Zufallsvariable X mit Freiheitsgrad n an. Symmetrie: $t_{n,1-\beta} = -t_{n,\beta}$.

n \ β	0.9	0.95	0.975	0.99
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
25	1,316	1,708	2,060	2,485
30	1,310	1,697	2,042	2,457
40	1,303	1,684	2,021	2,423
50	1,299	1,676	2,009	2,403
100	1,290	1,660	1,984	2,364
1000	1,282	1,646	1,962	2,330

Konfidenzintervall: Beispiel

Bei der Benzingewinnung für PKWs wird Nitromethan beigemischt. Eine Stichprobe von $n = 116$ Kontrollmessungen ergab folgende Werte für den Gehalt an Nitromethan (in ml/l): $\bar{\mu}_n = 25.452$, $\bar{\sigma}_n^2 = 0.7225$. Berechnen Sie das Konfidenzintervall für den mittleren Nitromethangehalt in der Produktion zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$.

Kapitel 10: Testen von Hypothesen

Vor dem Experiment: Aufstellen einer Hypothese betreffend der zu messenden Daten, z.B.

- Die Daten folgen einer Normalverteilung
- Der Erwartungswert ist 10.5
- Die Realisierungen sind unabhängig

Test: Nach Messung der Daten wird durch Rechnung wird überprüft, ob die gemessenen Daten der Hypothese widersprechen, d.h. ob unter der Annahme, dass die Hypothese gilt, die Daten sehr unwahrscheinlich sind.

Falls die Daten (unter der Hypothese) sehr unwahrscheinlich sind, wird die Hypothese verworfen. Andernfalls wird die Hypothese nicht verworfen (oder angenommen).

Kapitel 10: Testen von Hypothesen

Vor dem Experiment: Aufstellen einer Hypothese betreffend der zu messenden Daten, z.B.

- Die Daten folgen einer Normalverteilung
- Der Erwartungswert ist 10.5
- Die Realisierungen sind unabhängig

Test: Nach Messung der Daten wird durch Rechnung wird überprüft, ob die gemessenen Daten der Hypothese widersprechen, d.h. ob unter der Annahme, dass die Hypothese gilt, die Daten sehr unwahrscheinlich sind.

Falls die Daten (unter der Hypothese) sehr unwahrscheinlich sind, wird die Hypothese verworfen. Andernfalls wird die Hypothese nicht verworfen (oder angenommen).

Testen von Hypothesen

Vorgehen: Situation: $x_1, ..., x_n$ Messwerte, Grundannahmen festhalten.

1. Formuliere die Nullhypothese H_0. (Bsp).
2. Konstruiere den Annahmebereich (bzw. Ablehnungsbereich).
3. Führe das Experiment durch.
4. Überprüfe, ob die Daten im Annahmebereich liegen.

Ergebnis von 4.:

- Falls nein: Nullhypothese verwerfen
- Falls ja: Nullhypothese nicht verwerfen, bzw. annehmen

Falls Nullhypothese verworfen: Alternativhypothese $H_A := \neg H_0$ annehmen.

Testen von Hypothesen

Vorgehen: Situation: $x_1, \ldots, x_n$ Messwerte, Grundannahmen festhalten.

1. Formuliere die Nullhypothese H_0. (Bsp).
2. Konstruiere den Annahmebereich (bzw. Ablehnungsbereich).
3. Führe das Experiment durch.
4. Überprüfe, ob die Daten im Annahmebereich liegen.

Ergebnis von 4.:

- Falls nein: Nullhypothese verwerfen
- Falls ja: Nullhypothese nicht verwerfen, bzw. annehmen

Falls Nullhypothese verworfen: Alternativhypothese $H_A := \neg H_0$ annehmen.

Testen von Hypothesen

(Def.10.1) Seien $X_1, ..., X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ Messwerte. Eine Nullhypothese über $X_1, ..., X_n$ ist eine Aussage, deren Wahrheitsgehalt nur von der gemeinsamen Verteilung von $X_1, ..., X_n$ abhängt. Die Alternativhypothese H_A ist die Negation von H_0.

Ein Annahmebereich zum Fehlerniveau $\alpha \in [0, 1]$ für die Nullhypothese H_0 ist eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$, so dass

$$\mathbb{P}((X_1, ...X_n) \in A \,|\, H_0 \text{ ist wahr }) \geq 1 - \alpha$$

ist.

- (Beispiele von Nullhypothesen)
- (Beispiel 10.2: Materialbelastung)

Beispiel 10.2: Messwerte

$x = (x_1, ..., x_{20})$ =(9.50, 11.01, 12.97, 12.29, 12.34, 10.80, 13.51, 13.65, 13.01, 11.16, 14.77, 8.87, 11.15, 7.56, 12.77, 12.71, 12.10, 14.24, 9.35, 15.10)

Ergeben das empirische Mittel

$$\bar{\mu}_n(x_1, ..., x_{20}) = 11.94$$

Testen von Hypothesen: Annahmebereich

Grundannahme: $x_1, \ldots, x_n$ sind Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (welche gewisse Annahmen erfüllen, z.B. Unabhängigkeit)

Konstruktion des Annahmebereiches: Folgt dem Grundprinzip: Falls unter der Nullhypothese die beobachteten Daten sehr unwahrscheinlich sind, so verwirft man die Nullhypothese.

Was bedeutet "Daten sind sehr unwahrscheinlich?"

- Z.B. Konfidenzintervall
- Z.B. p-Wert (später)

Fehler 1. und 2. Art

(Def. 10.3) Sei H_0 eine Nullhypothese, und A ein Annahmebereich. Dann sind zwei Typen von “Fehlern” möglich:

- Der Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie eigentlich richtig wäre
- Der Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird angenommen, obwohl sie eigentlich falsch ist

(Satz 10.4) Sei H_0 eine Nullhypothese, und A ein Annahmebereich zum Fehlerniveau $\alpha \in [0, 1]$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, kleiner oder gleich α.

- Je kleiner der Fehler 1. Art, desto größer der Fehler 2. Art, und umgekehrt
- Fehler 2. Art im Allgemeinen nicht explizit quantifizierbar
- Wahl der Nullhypothese wichtig!
- (Beweis)

Fehler 1. und 2. Art

(Def. 10.3) Sei H_0 eine Nullhypothese, und A ein Annahmebereich. Dann sind zwei Typen von “Fehlern” möglich:

- Der Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie eigentlich richtig wäre
- Der Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird angenommen, obwohl sie eigentlich falsch ist

(Satz 10.4) Sei H_0 eine Nullhypothese, und A ein Annahmebereich zum Fehlerniveau $\alpha \in [0, 1]$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, kleiner oder gleich α.

- Je kleiner der Fehler 1. Art, desto größer der Fehler 2. Art, und umgekehrt
- Fehler 2. Art im Allgemeinen nicht explizit quantifizierbar
- Wahl der Nullhypothese wichtig!
- (Beweis)

p-Wert

(Def. 10.6) Seien $X_1, ..., X_n$ Zufallsvariablen, und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ Daten. Sei H_0 eine Nullhypotese diese Daten betreffend. Der rechtsseitige p-Wert für H_0 ist definiert als

$$p = p(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_i \geq x_i,\ i = 1, ..., n \mid H_0),$$

der linksseitige p-Wert als

$$p = p(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i,\ i = 1, ..., n \mid H_0),$$

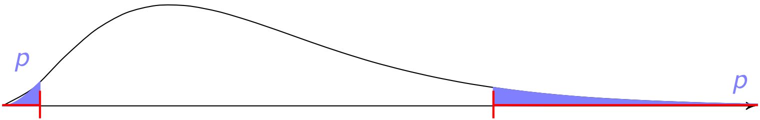
und der beidseitige p-Wert als

$$p = 2\min\{\mathbb{P}(X_i \geq x_i,\ i = 1, ..., n \mid H_0), \mathbb{P}(X_i \leq x_i,\ i = 1, ..., n \mid H_0)\}.$$

- Wahrscheinlichkeit für Werte "gleich oder extremer als die Messwerte $x_1, ..., x_n$"
- $p = p(x_1, ..., x_n)$ groß: Daten $(x_1, ..., x_n)$ sind "typische" (und nicht extreme) Realisierungen der Zufallsvariablen

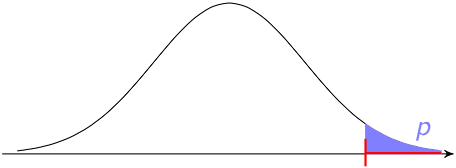
p-Wert

Beidseitiger p-Wert:



Roter Bereich: Werte "extremer als $(x_1, \ldots, x_n)$"

Einseitiger p-Wert:



p-Wert

(Satz 10.7) Sei $p(x)$ ein $p-$Wert zu den Daten $x = (x_1, ..., x_n)$.
Dann ist

$$A_\alpha := \{x : p(x) \geq \alpha\}$$

ein Annahmebereich zum Fehlerniveau α.

- (Skizze)
- H_0 wird also angenommen wenn $p \geq \alpha$ ist, und abgelehnt wenn $p < \alpha$ ist.
- (Beispiel: Parameter einer geometrischen Verteilung)