Annahme: Nitromethangehalt normalverteilt

$X_1, \dots, X_n$, $n = 116$

unabh. Normalvert. mit μ, σ^2 unbekannt

<u>Ges:</u> Konfidenzintervall für μ mit $\alpha = 0{,}05$

<u>Lös.</u> nach Satz 9.6:

$$J = \left[\bar{\mu}_n - \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, \bar{\mu}_n + \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\bar{\mu}_n = 25{,}452$$

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{\bar{\sigma}_n^2} = \sqrt{0{,}7225} = 0.85$$

$$t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{115,\,0{,}975} \underset{n=115 \gg 30}{\approx} z_{0{,}975} = 1{,}960$$

einsetzen $\Rightarrow$

$$J = [25{,}297, 25.607]$$

Näherung mittels Normalvert.

Hausaufgabe für uns alle:
Finde irgendwo $\boxed{t_{115,\,0{,}975}}$
und vergleiche die Konfidenzintervalle.

<u>Beispiel 10.1</u>

Stabilitäts-Belastungstest:

$X_1, \dots, X_n$: Gewicht, bei dem ein Bauteil stark verformt wird

Messung von $n = 20$ baugleichen Teilen. Var: $\sigma^2 = 2$

① Nullhypothese:

$$H_0: \ \mu_0 := E[X_1] = 12 \ (\text{kg})$$

② Annahmebereich:

Wähle $\alpha = 0.05$

Suche also $A \subset \mathbb{R}^n$ (mögliche Messwerte)

s.t.

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A \mid H_0) = \mathbb{P}_{\mu_0}((X_1, \dots, X_n) \in A) \geq 1 - \alpha = 0.95$$

<u>Idee:</u> H_0 wahr $\Rightarrow \bar{\mu}_n(X_1, \dots, X_n) = \mu_0$

bzw. $\mathbb{P}(|\bar{\mu}_n - \mu_0| \text{ klein}) \geq 1 - \alpha$.

Ansatz wie beim Konfidenzintervall:

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{\mu}_n(x_1, \dots, x_n) \in [\mu_0 - h, \mu_0 + h]\}$$

d.h.:

$$\mathbb{P}_{\mu_0}((X_1, \dots, X_n) \in A) = \mathbb{P}(\underbrace{J(X_1, \dots, X_n)}_{\substack{\text{Konfidenzintervall} \\ \text{zu } X_1, \dots, X_n}} \ni \mu_0)$$

Wir wissen vom letzten Mal, dass

$$J(x) = \left[\bar{\mu}_n(x_1, \dots, x_n) - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\mu}_n(x_1, \dots, x_n) + \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{h}\right]$$

Mit den Angaben $n = 20$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 2$

$$\Rightarrow h = z_{0.975} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}} \approx 0.6198$$

$\Rightarrow$ Annahmebereich $\mu_0 = 12$

$$A = \{(x_1, \dots, x_{20}) : \bar{\mu}_n(x_1, \dots, x_n) \in [11{,}3802, 12{,}6198]\}$$

Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art:

$\hookrightarrow \mathbb{P}(H_0 \text{ ablehnen} \mid H_0 \text{ wahr})$

$$= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \notin A \mid H_0 \text{ wahr})$$

$$= 1 - \underbrace{\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A \mid H_0 \text{ wahr})}_{\geq 1 - \alpha \quad \text{def. Annahmebereich}}$$

$$\leq \alpha \ ! \qquad \square$$

<u>Def.</u> Eine <u>Teststatistik</u> ist eine Zufallsvariable

$$Y = f(X_1, \dots, X_n),$$

also eine Funktion der Zufallsvariablen.

Testwert:

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad \text{Daten einsetzen}$$

"Sehr unwahrscheinlich" für Messwerte kann mit Hilfe von Konfidenzintervallen bzw. Quantilen quantifiziert werden, oder mit <u>p-Werten</u>.

<u>Def.</u> Ein p-Wert der Teststatistik $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ bezüglich H_0 ist:

- rechtsseitiger p-Wert:
$$p(y) = \mathbb{P}(Y \geq y \mid H_0 \text{ wahr})$$

- linksseitiger p-Wert:
$$p(y) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid H_0 \text{ wahr})$$

- beidseitiger p-Wert:
$$p(y) = 2\min\{\mathbb{P}(Y \geq y \mid H_0), \mathbb{P}(Y \leq y \mid H_0)\}$$