Stochastik für die Informatik, Vorlesung 23

Inhalt

- Markov-Ketten, Startverteilungen
- strukturelle Eigenschaften von Markov-Ketten
- Invariante Verteilung, deren Bedeutung und Berechnung

Lernziele

- Mit Markov-Ketten umgehen können und einige wichtige Eigenschaften kennen
- Invariante Verteilungen berechnen können
- Die Bedeutung von invarianten Verteilungen kennen

Kapitel 11: Markov-Ketten

Beispiel: Erkunden einer Netzwerkstruktur

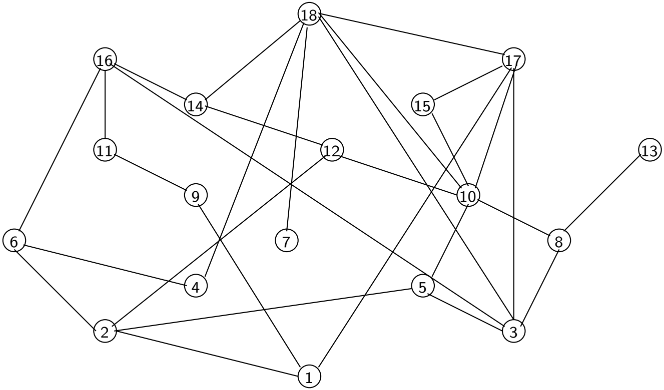


Abbildung: Netzwerk aus Knoten und Kanten

- Von innerhalb des Netzwerks sieht man nur seine Nachbarn
- Erkunden mittels Springen zu einem zufälligen Nachbarknoten

Markov-Ketten

(Def. 11.1) Sei S eine (höchstens abzählbare) Menge. Eine (homogene) Markov-Kette auf S ist eine Folge von Zufallsvariablen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit Werten in S so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = a_n \,|\, X_0 = a_0, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) &= \mathbb{P}(X_n = a_n \,|\, X_{n-1} = a_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = a_n \,|\, X_0 = a_{n-1}).\end{aligned}$$

In Worten: Der Zustand der Kette im Schritt n hängt nur vom Zustand im Schritt $n-1$ ab, und nicht von der weiter zurückliegenden Vergangenheit (und auch nicht von n).

Die Menge S heißt Zustandsraum der Markov-Kette, ein Element $a \in S$ heißt Zustand.

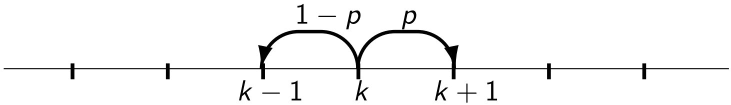
Beispiel 11.1: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$

- Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1 \mid X_{n-1} = k) = \frac{1}{2}$$

- Asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k) = p$$
$$\mathbb{P}(X_n = k-1 \mid X_{n-1} = k) = 1-p$$



- Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x) = \frac{1}{4}$$

falls x und y Nachbarn sind.

Übergangswahrscheinlichkeiten

(Def. 11.2) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Markov-Kette auf einem Zustandsraum S. Seien $a, b \in S$. Dann heißt

$$p_{a,b} := \mathbb{P}(X_n = b \,|\, X_{n-1} = a)$$

Übergangswahrscheinlichkeit von a nach b.

Notation: Wir verwenden äquivalent die verschiedenen Schreibweisen

$$p_{a,b} = p_{ab} = p(a, b)$$

für die Übergangswahrscheinlichkeiten.

- Beispiel 11.2 Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$
- Beispiel 11.3 Irrfahrt auf Graph
- Übergangsgraph

Übergangsmatrix

(Def. 11.3) Die Übergangsmatrix einer Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum $S = \{a_1, ..., a_K\}$ ist gegeben durch

$$P := \left(p_{a_n,a_m}\right)_{n,m=1,...,K} = \begin{bmatrix} p_{a_1,a_1} & p_{a_1,a_2} & \cdots & p_{a_1,a_K} \\ p_{a_2,a_1} & p_{a_2,a_2} & \cdots & p_{a_2,a_K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{a_K,a_1} & p_{a_K,a_2} & \cdots & p_{a_K,a_K} \end{bmatrix}$$

- Beispiel 11.4: Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, Übergangsmatrix

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(Übergangsgraph zeichnen)

Übergangsmatrix

(Def. 11.3) Die Übergangsmatrix einer Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum $S = \{a_1, ..., a_K\}$ ist gegeben durch

$$P := \left(p_{a_n,a_m}\right)_{n,m=1,...,K} = \begin{bmatrix} p_{a_1,a_1} & p_{a_1,a_2} & \cdots & p_{a_1,a_K} \\ p_{a_2,a_1} & p_{a_2,a_2} & \cdots & p_{a_2,a_K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{a_K,a_1} & p_{a_K,a_2} & \cdots & p_{a_K,a_K} \end{bmatrix}$$

- Beispiel 11.4: Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, Übergangsmatrix

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(Übergangsgraph zeichnen)

Stochastische Matrizen

(Satz 11.1) Eine Übergangsmatrix P hat die Eigenschaften

- $0 \leq p_{a,b} \leq 1$ für alle $a, b \in S$
- $\sum_{b \in S} p_{ab} = 1 \quad \forall a \in S.$

Eine Matrix mit diesen zwei Eigenschaften heißt stochastische Matrix. Jede Übergangsmatrix einer Markov-Kette ist eine stochastische Matrix, und umgekehrt existiert zu jeder stochastischen Matrix eine Markov-Kette.

Stochastische Matrizen

(Satz 11.1) Eine Übergangsmatrix P hat die Eigenschaften

- $0 \leq p_{a,b} \leq 1$ für alle $a, b \in S$
- $\sum_{b \in S} p_{ab} = 1 \quad \forall a \in S$.

Eine Matrix mit diesen zwei Eigenschaften heißt stochastische Matrix. Jede Übergangsmatrix einer Markov-Kette ist eine stochastische Matrix, und umgekehrt existiert zu jeder stochastischen Matrix eine Markov-Kette.

Übergangsmatrix aus dem ersten Beispiel

$$P = \begin{bmatrix}
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 \\
0 & 0 & 1/6 & 1/6/0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0
\end{bmatrix}$$

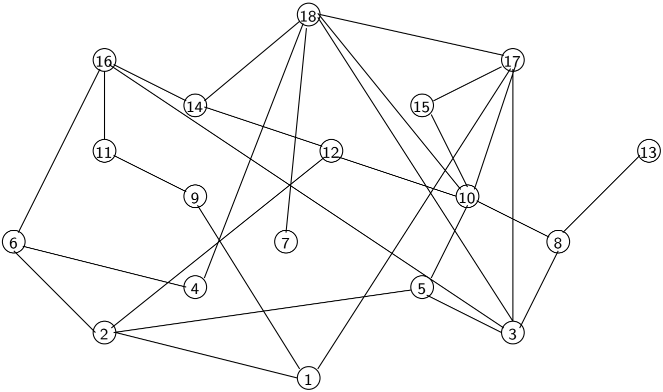


Abbildung: Netzwerk aus Knoten und Kanten

Mehrstufige Übergangswahrscheinlichkeiten

(Satz 11.2) Sei P die Übergangsmatrix einer Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum, und sei

$$P^n = P \cdot \ldots \cdot P$$

die n-te Matrix-Potenz von P, von der Form $P^n = (p_{a,b}^{(n)})_{a,b \in S}$. Dann gilt für die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(X_n = b \,|\, X_0 = a) = p_{a,b}^{(n)}.$$

Startverteilung

(Def. 11.13) Sei für $a \in S$

$$\boxed{\nu_a := \mathbb{P}(X_0 = a)}$$

Der (Spalten-)Vektor $\nu = (\nu_a)_{a \in S}$ heißt Startverteilung der Markov-Kette. Schreibweise auch manchmal $\nu(a) := \nu_a$. Für die Verteilung von $X_n, n \geq 1$, schreiben wir auch

$$\mu_n(a) := \mathbb{P}(X_n = a), a \in S.$$

Eindimensionale Verteilung

(Satz 11.3) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Markov-Kette auf einem Zustandsraum S. Dann gilt für alle $b \in S$

$$\mathbb{P}(X_n = b) = \sum_{a \in S} \nu(a) \cdot p_{a,b}^{(n)}.$$

- D.h. kennt man $\nu(a) = \mathbb{P}(X_0 = a)$ und die Übergangsmatrix P, so kann man die Verteilung aller X_n, $n = 1, 2, \ldots$ (im Prinzip) berechnen.
- Kompaktere Notation:

$$\mu_n = (\nu^T P^n).$$

- (Beispiel 11.5)
- Für praktische Zwecke ist für große n und großen Zustandsraum S aber der Rechenaufwand hoch.

Invariante Verteilung

(Def. 11.5) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S. Ein (Spalten-)vektor $(\pi_a)_{a \in S}$ heißt invariante Verteilung für die Markov-Kette $X = (X_n)_{n \geq 0}$, falls gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- Andere Bezeichnungen: Stationäre Verteilung, Gleichgewichtsverteilung
- (2) besagt dass π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Zustandsraum S ist.
- Andere Schreibweise für (1): $\pi^T = \pi^T P$ (Vektor-Matrix-Multiplikation)

Invariante Verteilung

(Def. 11.5) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S. Ein (Spalten-)vektor $(\pi_a)_{a \in S}$ heißt invariante Verteilung für die Markov-Kette $X = (X_n)_{n \geq 0}$, falls gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- Andere Bezeichnungen: Stationäre Verteilung, Gleichgewichtsverteilung
- (2) besagt dass π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Zustandsraum S ist.
- Andere Schreibweise für (1): $\pi^T = \pi^T P$ (Vektor-Matrix-Multiplikation)

Invariante Verteilung

(Satz 11.4) Falls π eine invariante Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$ ist, und $\nu(a) = \mathbb{P}(X_0 = a) = \pi_a$ für alle $a \in S$ gilt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n(a) = \mathbb{P}(X_n = a) = \pi_a.$$

- Begriff "invariant"
- Bei Start in der invarianten Verteilung bleibt die Verteilung der Kette zu jedem festen Zeitpunkt unverändert

Bestimmung von invarianten Verteilungen

Gegeben Übergangsmatrix P, finde π so dass gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet (1)

$$\pi^T = \pi^T P$$

- Äquivalent:

$$(P - I)^T \pi = 0,$$

wobei I die Einheitsmatrix (Identität) ist, und $.^T$ die Transposition bezeichnet

- Dies bildet ein lineares Gleichungssystem (vgl. Lineare Algebra).
- Bestimmung einer invarianten Verteilung: Lösen des linearen Gleichungssystems (unter der zusätzlichen Bedingung (2)).

Bestimmung von invarianten Verteilungen

Gegeben Übergangsmatrix P, finde π so dass gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet (1)

$$\pi^T = \pi^T P$$

- Äquivalent:

$$(P - I)^T \pi = 0,$$

  wobei I die Einheitsmatrix (Identität) ist, und $.^T$ die Transposition bezeichnet
- Dies bildet ein lineares Gleichungssystem (vgl. Lineare Algebra).
- Bestimmung einer invarianten Verteilung: Lösen des linearen Gleichungssystems (unter der zusätzlichen Bedingung (2)).

Bestimmung von invarianten Verteilungen

Gegeben Übergangsmatrix P, finde π so dass gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet (1)

$$\pi^T = \pi^T P$$

- Äquivalent:

$$(P - I)^T \pi = 0,$$

  wobei I die Einheitsmatrix (Identität) ist, und $.^T$ die Transposition bezeichnet
- Dies bildet ein lineares Gleichungssystem (vgl. Lineare Algebra).
- Bestimmung einer invarianten Verteilung: Lösen des linearen Gleichungssystems (unter der zusätzlichen Bedingung (2)).

Bestimmung von invarianten Verteilungen

Gegeben Übergangsmatrix P, finde π so dass gelten

(1) $\pi_a = \sum_{b \in S} \pi_b p_{b,a}$, für alle $a \in S$,

(2) $\pi_a \geq 0$ für alle $a \in S$, und $\sum_{a \in S} \pi_a = 1$.

- In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet (1)

$$\pi^T = \pi^T P$$

- Äquivalent:

$$(P - I)^T \pi = 0,$$

  wobei I die Einheitsmatrix (Identität) ist, und $.^T$ die Transposition bezeichnet
- Dies bildet ein lineares Gleichungssystem (vgl. Lineare Algebra).
- Bestimmung einer invarianten Verteilung: Lösen des linearen Gleichungssystems (unter der zusätzlichen Bedingung (2)).

Bestimmung von invarianten Verteilungen

Aus den Überlegungen auf der vorigen Folie folgt somit

(Satz 11.5) Eine homogene Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum S besitzt immer mindestens eine invariante Verteilung. Invariante Verteilungen sind Lösungen des Gleichungssystems

$$(P - I)^T \pi = 0, \quad \sum_{a \in S} \pi_a = 1.$$

Hier bezeichnet I die Einheitsmatrix der Größe $|S|$,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (Beispiel 11.7, 11.8)

Beispiel

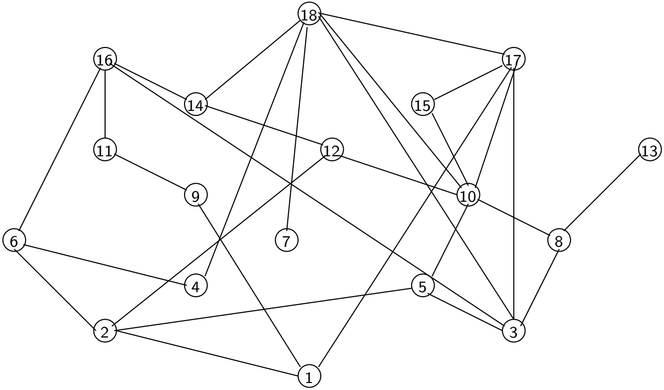


Abbildung: Netzwerk aus Knoten und Kanten

Übergangsmatrix aus dem Beispiel

$$
P = \begin{bmatrix}
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 \\
0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0
\end{bmatrix}
$$

Im Beispiel:

Lösung des Gleichungssystems

$$(P - I)^T \pi = 0,$$

$$\pi_1 + \ldots + \pi_{18} = 1$$

ergibt:

$$\pi \approx (0.0526, 0.0702, 0.0877, 0.0351, 0.0526, 0.0526, 0.0175, 0.0526, 0.0351, 0.0877, 0.0351, 0.0526, 0.0175, 0.0526, 0.0351, 0.0702, 0.0877, 0.1053)$$

- π_i ist hier proportional zur Anzahl Kanten von Knoten i
- Welche Informationen über das Verhalten der Markov-Kette erhalten wir aus der invarianten Verteilung?

Strukturelle Eigenschaften

(Def. 7.16) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Eine Folge von Zuständen $(a_0, a_1, ...a_k)$ heißt (guter) Pfad, falls $p_{a_i,a_{i+1}} > 0$ ist für alle $i = 0, ..., k-1$.

Das bedeutet, dass die Kette von a_0 nach a_1 und weiter nach $a_2, a_3, ...$ bis a_k tatsächlich springen kann.

(Def. 7.17) Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, falls für jede Wahl von zwei Zuständen $a, b \in S$ ein Pfad existiert, welcher a und b verbindet, d.h. ein Pfad mit $a_0 = a$ und $a_k = b$. Die Länge k ist dabei egal.

(Def. 7.18) Eine irreduzible Markov-Kette heißt aperiodisch, falls für alle $a \in S$ gilt

$$\mathrm{ggT}\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{Pfad der Länge } k \text{ von } a \text{ nach } a\} = 1.$$

(Beispiele)

Strukturelle Eigenschaften

(Def. 7.16) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Eine Folge von Zuständen $(a_0, a_1, ...a_k)$ heißt (guter) Pfad, falls $p_{a_i,a_{i+1}} > 0$ ist für alle $i = 0, ..., k-1$.

Das bedeutet, dass die Kette von a_0 nach a_1 und weiter nach $a_2, a_3, \dots$ bis a_k tatsächlich springen kann.

(Def. 7.17) Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, falls für jede Wahl von zwei Zuständen $a, b \in S$ ein Pfad existiert, welcher a und b verbindet, d.h. ein Pfad mit $a_0 = a$ und $a_k = b$. Die Länge k ist dabei egal.

(Def. 7.18) Eine irreduzible Markov-Kette heißt aperiodisch, falls für alle $a \in S$ gilt

$$\mathrm{ggT}\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{Pfad der Länge } k \text{ von } a \text{ nach } a\} = 1.$$

(Beispiele)

Strukturelle Eigenschaften

(Def. 7.16) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Eine Folge von Zuständen $(a_0, a_1, ...a_k)$ heißt (guter) Pfad, falls $p_{a_i,a_{i+1}} > 0$ ist für alle $i = 0, ..., k-1$.

Das bedeutet, dass die Kette von a_0 nach a_1 und weiter nach $a_2, a_3, ...$ bis a_k tatsächlich springen kann.

(Def. 7.17) Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, falls für jede Wahl von zwei Zuständen $a, b \in S$ ein Pfad existiert, welcher a und b verbindet, d.h. ein Pfad mit $a_0 = a$ und $a_k = b$. Die Länge k ist dabei egal.

(Def. 7.18) Eine irreduzible Markov-Kette heißt aperiodisch, falls für alle $a \in S$ gilt

$$\text{ggT}\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{Pfad der Länge } k \text{ von } a \text{ nach } a\} = 1.$$

(Beispiele)

Existenz und Eindeutigkeit von invarianten Verteilungen

(Satz 7.24) Eine homogene Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum S besitzt immer mindestens eine invariante Verteilung.

(Satz 7.25) Falls die Markov-Kette im obigen Fall irreduzibel ist, so ist die invariante Verteilung eindeutig.

- (Bem.) unendlicher Zustandsraum
- Beispiel

Konvergenz gegen die invariante Verteilung

(Theorem 7.28) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und aperiodische homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S. Sei $(\pi_a)_{a\in S}$ eine invariante Verteilung. Dann gilt für alle $a \in S$, unabhängig von der Startverteilung,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = a) = \pi_a.$$

- Egal wo man startet: Für große n gilt $\mathbb{P}(X_n = a) \approx \pi_a$.
- Falls die Kette in einer (beliebigen) Startverteilung ν startet, befindet sie sich nach hinreichend langer Zeit in der stationären Verteilung
- Information über Struktur der Kette. Bsp. Netzwerk: Knoten mit vielen Kanten werden oft besucht, für solche Knoten a ist π_a größer als für solche die selten besucht werden.

Konvergenz gegen die invariante Verteilung

(Theorem 7.28) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und aperiodische homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S. Sei $(\pi_a)_{a\in S}$ eine invariante Verteilung. Dann gilt für alle $a \in S$, unabhängig von der Startverteilung,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = a) = \pi_a.$$

- Egal wo man startet: Für große n gilt $\mathbb{P}(X_n = a) \approx \pi_a$.
- Falls die Kette in einer (beliebigen) Startverteilung ν startet, befindet sie sich nach hinreichend langer Zeit in der stationären Verteilung
- Information über Struktur der Kette. Bsp. Netzwerk: Knoten mit vielen Kanten werden oft besucht, für solche Knoten a ist π_a größer als für solche die selten besucht werden.