Übergangswahrscheinlichkeiten:
symmetrisch: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

$p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = \frac{1}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

$p_{k,i} = 0$ für $|i-k| \neq 1$, $k, i \in \mathbb{Z}$

asymm.: Irrfahrt

$p_{k,k+1} = p$, $p_{k,k-1} = 1-p$, $p_{k,i} = 0$ sonst

symm. Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$:

$$p_{z,y} = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{falls } z \text{ und } y \text{ Nachbarn} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp Graph mit Knoten und Kanten
Übergangswahrsch. ausgehend von Knoten i:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{falls eine Kante von } i \text{ nach } j \text{ geht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei d_i = Anzahl Nachbarknoten von i
(= Grad/degree von i)

"Irrfahrt auf einem Graphen"

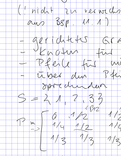
Übergangsgraph zu einer Übergangsmatrix

(nicht zu verwechseln mit dem Graphen aus Bsp 11.1)

- gerichteter Graph
- Knoten für jeden Zustand
- Pfeile für möglichen Übergang
- aber den Pfeilen werden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$S = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Sprünge von } 1 \\ \leftarrow \text{Sprünge von } 2 \\ \leftarrow \text{Sprünge von } 3 \end{array}$$



---

2. Schritt: Übergangswahrscheinlichkeiten

Bsp. vorher

Start in 3

$$P(X_2 = 1 \mid X_0 = 3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

Allgemein:

$$P^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} \end{bmatrix}$$

Die Matrixmultiplikation entspricht in diesem Fall den Rechenwegen bei Wahrscheinlichkeitsbäumen bei mehrstufigen Experimenten
(Multiplikationsregel / Additionsregel)
Bedingte Wahrsch. / Formel der Gesamtwahrsch.

Formaler Beweis

$$P(X_n = b \mid X_0 = a)$$

$$= \sum_{c \in S} P(X_n = b \mid X_{n-1} = c, \cancel{X_0 = a}) \cdot P(X_{n-1} = c \mid X_0 = a)$$

$$= \sum_{c \in S} \underbrace{P(X_n = b \mid X_{n-1} = c)}_{= p_{cb}} \underbrace{P(X_{n-1} = c \mid X_0 = a)}_{p_{ac}^{(n-1)} \text{ induktiv}}$$

$$= \sum_{c \in S} p_{cb} \cdot p_{ac}^{(n-1)}$$

$$\left(= \sum_{c_1, \ldots, c_{n-1} \in S} \underbrace{p_{ac_1} \cdot p_{c_1c_2} \cdots p_{c_{n-1}b}}_{P(X_0 = a)} \right)$$

↑ wahr

Startverteilung

Die Startverteilung muss festgelegt werden, durch einen Vektor

Spezialfall $n = 1$

$$P(X_n = b) = \sum_{a \in S} v_a \, p_{ab}$$

Fester Startwert $a = 1$

$$v(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{1. Stelle}$$

$$P(X_n = b \mid X_0 = 1) = p_{1b}$$

$$P(X_n = b \mid X_m = a) = p_{ab}^{(n-m)}$$

Bsp 11.6

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \{1, 2, 3\}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Startverteilung: starte mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in 1 und $1/2$ in 3

Verteilung von X_3?

$P(X_3 = 1) =$

$P(X_3 = 2) =$

$P(X_3 = 3) =$

$$\mu_3 = v^T \cdot P^3 \quad \leftarrow \text{Zeilenvektor der Länge } 3$$

Die Einträge sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/16 & 5/16 \\ 1/2 & 13/64 & 13/64 \\ 1/2 & 9/32 & 9/32 \end{bmatrix}$$

$$= P \cdot P$$

$$v^T \cdot P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 3/16 & 5/16 \\ 1/2 & 13/64 & 13/64 \\ 1/2 & 9/32 & 9/32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & \frac{13}{64} & \frac{13}{64} \end{bmatrix}$$

$P(X_3 = 1)$ $\quad P(X_3 = 2)$ $\quad P(X_3 = 3)$

$$\boxed{\pi^T = \pi^T \cdot P} \quad (*)$$

$$[\pi_1, \ldots, \pi_3] = [\pi_1, \ldots, \pi_3] \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{31} & \cdots & p_{33} \end{bmatrix}$$

also Eigenproblem

$\pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \ldots + \pi_3 p_{31} = \pi_1$

Trick: $\pi^T = \pi^T \cdot I$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \} \text{ Einheitsmatrix der Größe } 3$$

$(*)$ $\Leftrightarrow \pi^T I = \pi^T \cdot P$

$\Leftrightarrow \pi^T I - \pi^T P = 0$ ← 0-Matrix

$\Leftrightarrow \pi^T (I - P) = 0$

$$\boxed{(I - P)^T \pi = 0}$$

3×3-Matrix

unterbestimmtes Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten