Goethe-Universität Frankfurt a. M.,
Institut für Mathematik
WiSe 2022/23

Prof. Dr. Noemi Kurt
Michel Reitmeier

Stochastik für die Informatik
Hausaufgabenblatt 12

Ausgabe: 27.01. – Abgabe: 03.02, Besprechung in den jeweiligen Tutorien (06. 02. - 10. 02.)

Hausaufgabe 12.1 (Konvexkombinationen invarianter Verteilungen) *3 Punkte*

Seien $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$ zwei invariante Verteilungen für eine Übergangsmatrix P auf einem endlichen Zustandsraum S. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\alpha \in [0,1]$ die Verteilung gegeben durch

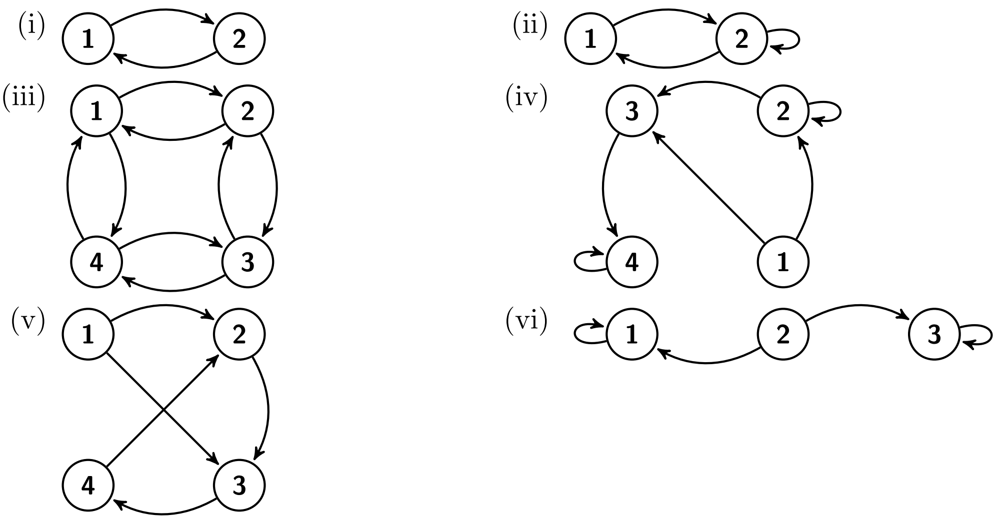
$$\pi_j = \alpha \pi_j^{(1)} + (1-\alpha)\pi_j^{(2)}, \qquad j \in S$$

ebenfalls eine invariante Verteilung für P ist.

Hausaufgabe 12.2 (Irreduzibilität und Aperiodizität) *5 Punkte*

Welche der Markovketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a)



(b) Betrachten Sie alle die Markovketten in der Teilaufgabe (a), die irreduzibel sind. Welche von diesen Ketten konvergieren gegen ihre eindeutige invariante Verteilung, gegeben, dass sie vom jeweiligen Zustand 1 starten?

(c) Zeigen Sie, dass die Markovkette zum Übergangsgraphen (vi) unendlich viele invariante Verteilungen hat.

Hausaufgabe 12.3 (Doppeltstochastische Matrizen) *3 Punkte*

Eine doppeltstochastische Matrix P auf einem endlichen Zustandsraum S mit $N := |S|$ ist eine stochastische Matrix mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\sum_{i \in S} p_{i,j} = 1, \qquad \text{für alle } j \in S,$$

d.h. dass neben den Zeilensummen auch die Spaltensummen sich zu 1 aufsummieren. Zeigen Sie, dass für doppeltstochastische Matrizen die Gleichverteilung auf S eine invariante Verteilung ist.

Hausaufgabe 12.4 (Invariante Verteilung und Irreduzibilität) *4 Punkte*

Wir betrachten eine homogene Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist die Kette irreduzibel und aperiodisch?

(b) Bestimmen Sie die invariante Verteilung π von $(X_n)_{n\geq 0}$.

(c) Erfüllt die Markov-Kette die Eigenschaft $\pi(i)p_{i,j} = \pi(j)p_{j,i}$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$?

(d) Finden Sie alle Eigenwerte von P.

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

- **Das ist das letzte Hausaufgabenblatt. Die hier erzielten Punkte werden allerdings nicht mehr gewertet. (Es sind also keine Zusatzpunkte!) Die Punkte dienen lediglich dazu, mithilfe der Korrektur ihres Tutors ein Feedback zu den Aufgaben zu bekommen. Wir empfehlen, das Blatt trotzdem zu bearbeiten.**
- Die Hausaufgabenblätter werden Freitags auf Moodle veröffentlicht und enthalten Hausaufgaben, die in der darauf folgenden Woche entweder **vor der Vorlesung am Freitag um 12:00 Uhr** in Hörsaal V abzugeben sind oder **vor Freitag 12:00 Uhr** in das Schließfach Ihres Tutors (Robert-Mayer-Straße 6-8, 3. Stock) eingeworfen werden müssen.
- Die Hausaufgaben werden anschließend in den Tutorien der nächsten Woche besprochen.