Bsp.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$S = \{1, 2, 3\}$

Gesucht: invariante Verteilung(en) $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$

d.h. Lösung(en) von

$$(P - I)^T \pi = 0, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$(P-I)^T = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(P - I)^T \cdot \pi = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3 &\overset{!}{=} 0 && (i) \\ -\tfrac{3}{4}\pi_2 + \tfrac{1}{2}\pi_3 &\overset{!}{=} 0 && (ii) \\ \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_2 - \pi_3 &\overset{!}{=} 0 && (iii) \\ \text{zusätzlich: } \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 && (iv) \end{aligned}\right\}$$

Löse dieses Gleichungssystem

(ii) $\Rightarrow \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2}}$

einsetzen in (i)

$$\frac{1}{2}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{5}{2}\pi_2 = \pi_1}$$

(einsetzen in (iv)): $\frac{5}{2}\pi_2 + \pi_2 + \frac{3}{2}\pi_2 = 1$

$\Rightarrow \underline{\pi_2 = \frac{1}{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\pi = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/5 \\ 3/10 \end{bmatrix}}}$

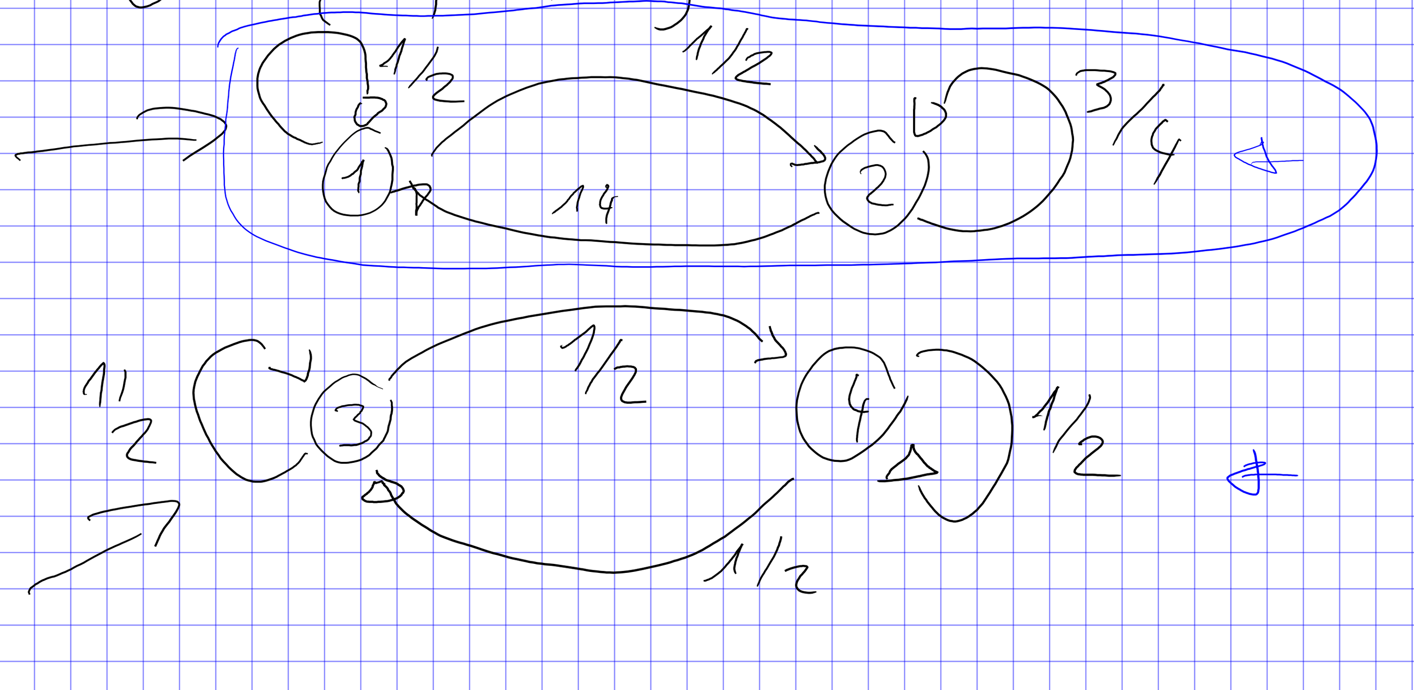
---

2. Beispiel:

$$P - I = \begin{bmatrix} 1/2 - 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 - 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 - 1 \end{bmatrix}$$

Übergangsgraph zu P:

$S = \{1, \dots, 4\}$



$$(P - I)^T \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}$$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\pi_1 - \tfrac{1}{4}\pi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\pi_2 = 2\pi_1}$$

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\pi_3 + \tfrac{1}{2}\pi_4 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\pi_3 - \tfrac{1}{2}\pi_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\pi_3 = \pi_4}$$

$\underline{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1}$

Ansatz $\pi_1 = \underline{a} \Rightarrow \underline{\pi_2 = 2a}$

$a + 2a + 2\pi_3 = 1 \Rightarrow \underline{\pi_3 = \frac{1}{2}(1 - 3a)}$

$a \leq \frac{1}{3}$ sonst wäre $\pi_3 < 0$. (!)

Lösungsmenge unseres Gleichungssystems:

$$\underline{\underline{L}} = \{(\underline{\underline{a}}, 2a, \tfrac{1}{2}(1-3a), \tfrac{1}{2}(1-3a)) : \underline{0 \leq a \leq 1/3}\}$$

∞ viele invariante Verteilungen

<u>Extremfälle:</u>

$a = 0$: $\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

ist eine dieser Lösungen

$a = 1/3$ $\pi^{(1/3)} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ist ebenfalls eine Lösung

allgemeine Lösung:

$$\underline{\pi^{(\alpha)}} = \underline{\alpha \cdot \pi^{(1/3)} + (1-\alpha)\pi^{(0)}}, \ \alpha \in [0,1]$$

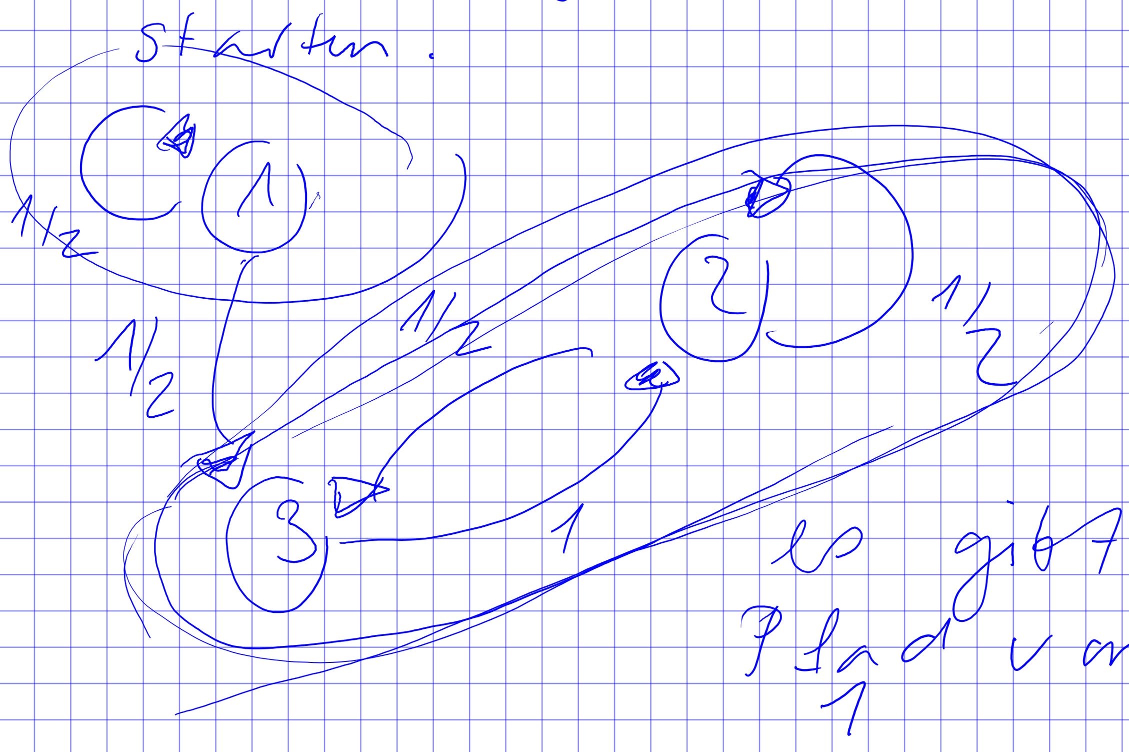
ist ebenfalls Lösung,

genauer: Die Lösungsmenge L kann auch anders parametrisiert werden, als

$$L = \{\alpha \cdot \pi^{(1/3)} + (1-\alpha)\pi^{(0)}, \ \underline{\alpha \in [0,1]}\}$$

Interpretation von α:

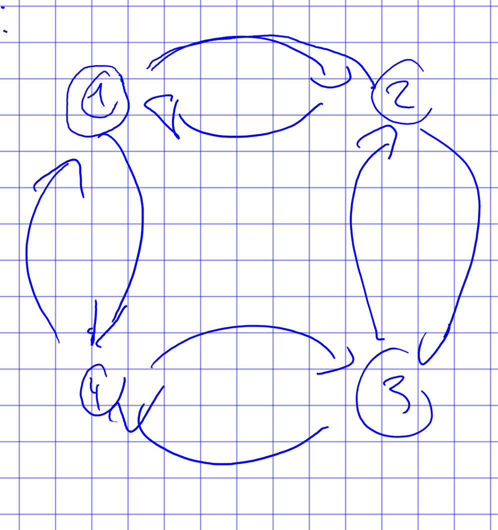
α gibt die Wahrscheinlichkeit an, in der Komponente mit den Zuständen 1 und 2 zu starten.



es gibt keinen Pfad von 2 nach 1

$\Rightarrow$ <u>nicht</u> $\boxed{\text{irreduzibel}}$

Bsp:



Pfade von 1 nach 1

Mögliche Pfadlängen von 1 nach 1: Pfade der Länge 2, 4

es gibt Pfade von gerader Länge von 1 nach 1, aber nicht von ungerader Länge

ggT(Pfadlängen $1 \to 1$) = 2