siehe unten

Vorlesung 25

Warteschlange, inv. Vert.

$$\underbrace{(P-I)^T \pi = 0}, \quad \pi_0 + \dots + \pi_n = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi^T P = \pi^T} \quad (*)$$

intuitiv $\boxed{\underbrace{p_{i,i+1}}_{\lambda} \cdot \pi_i = \underbrace{p_{i+1,i}}_{\mu} \pi_{i+1}} \ \forall i$

d. h. $\boxed{\lambda \cdot \pi_i = \mu \cdot \pi_{i+1}} \quad \forall i$

$i=0 \qquad \lambda \cdot \pi_0 = \mu \cdot \pi_1 \quad \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$

$i=1 \qquad \lambda \cdot \pi_1 = \mu \pi_2 \quad \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$

$\vdots$

$$\boxed{\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0} \quad (1)$$

π_0 muss so gewählt werden, dass

$\pi_0 + \dots + \pi_k = 1$ ist, also

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}} \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

Ziel: Simuliere aus

$$\pi(k_1, \dots, k_N) = \mathbb{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_N = k_N \mid Y_1 + \dots + Y_N = M)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_N = k_N, Y_1 + \dots + Y_N = M)}{\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_N = M)}$$

Def. bedingte W.

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } k_1 + \dots + k_N \neq M \\ \underbrace{\frac{\mathbb{P}(Y_1 = k_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(Y_N = k_N)}{\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_N = M)}} & \text{falls } k_1 + \dots + k_N = M \end{cases}$$

unabh.

$$\boxed{\pi(k_1, \dots, k_N) = \frac{r_{k_1} \cdot \dots \cdot r_{k_N}}{\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_N = M)}}$$

$\stackrel{!}{=} C(N, M)$

$$\mathbb{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_N = k_N, \cancel{Y_1 + \dots Y_N = M})$$

$$= \mathbb{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_N = k_N) \quad \text{falls } k_1 + \dots + k_N = M$$

$$= \mathbb{P}(Y_1 = k_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(Y_N = k_N)$$

Konstruktion der Referenzkette

Zustandsraum S, $k \in S$ ist ein Vektor $k = (k_1, \dots, k_N)$ $k_i \in \mathbb{N}_0$

Konstruktion $\qquad \sum_{i=1}^{N} k_i = M$

- Wähle gleichverteilt $(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2$, $i \neq j$
  $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten
- Wähle gleichverteilt einen Wert $u \in \{0, \dots, k_i + k_j\}$
  $k_i + k_j + 1$ Möglichkeiten
- Springe von k nach
  $k' = (k_1, \dots, \underset{i\text{-ten}}{u}, \dots, \underset{j\text{te Stelle}}{k_i + k_j - u}, \dots, k_N)$

dann gilt

$\sum k_i = M \Rightarrow \sum k_i' = M$

Damit lautet die Übergangsmatrix Q für die Referenzkette

$$q_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ und } l \text{ sich an mehr als 2 Stellen unterscheiden} \\ \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot \frac{1}{k_i + k_j + 1} & \text{falls } k \text{ und } l \text{ sich an genau den Stellen } i \text{ und } j \text{ unterscheiden} \\ 1 - \sum_{l \neq k} q_{kl} & \text{falls } k = l \end{cases}$$

$\rightarrow$ außerdem gilt $q_{kl} = q_{lk}$

Q schlägt Übergänge vor, die mit einer gewissen Wahrsch. akzeptiert werden:

2 Möglichkeiten:

i) Falls $\pi(l) > \pi(k) \Leftrightarrow \frac{\pi(l)}{\pi(k)} > 1$

dann ist $p_{kl} = q_{kl}$

ii) sonst ist $p_{kl} = q_{kl} \cdot \frac{\pi(l)}{\pi(k)}$

$$\frac{\pi(l)}{\pi(k)} = \frac{r_{l_1} \cdot \dots \cdot r_{l_N}}{\cancel{C(N,M)}} \cdot \frac{\cancel{C(N,M)}}{r_{k_1} \cdot \dots \cdot r_{k_N}} < 1$$

$$= \frac{r_{l_1} \cdot \dots \cdot r_{l_N}}{r_{k_1} \cdot \dots \cdot r_{k_N}} = \frac{r_{l_i} r_{l_j}}{r_{k_i} r_{k_j}}$$

Präfixcode:

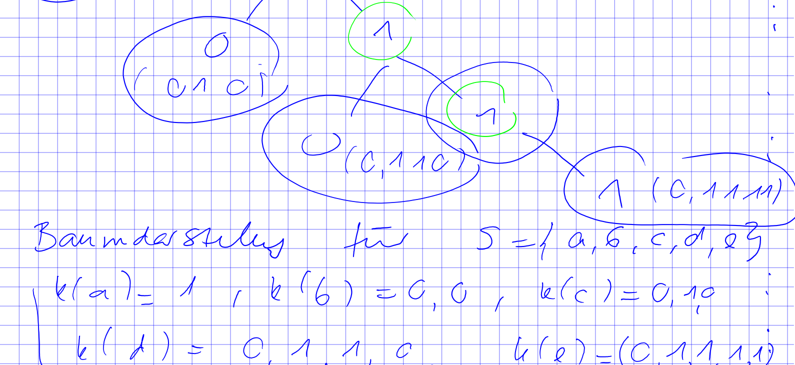
a, b

$k(a) = 01$

$k(b) = 011$

Baumdarstellung:

Bsp.



Baumdarstellung für $S = \{a, b, c, d, e\}$

$k(a) = 1$, $k(b) = 0,0$, $k(c) = 0,1,0$

$k(d) = 0,1,1,0$, $k(e) = (0,1,1,1,1)$