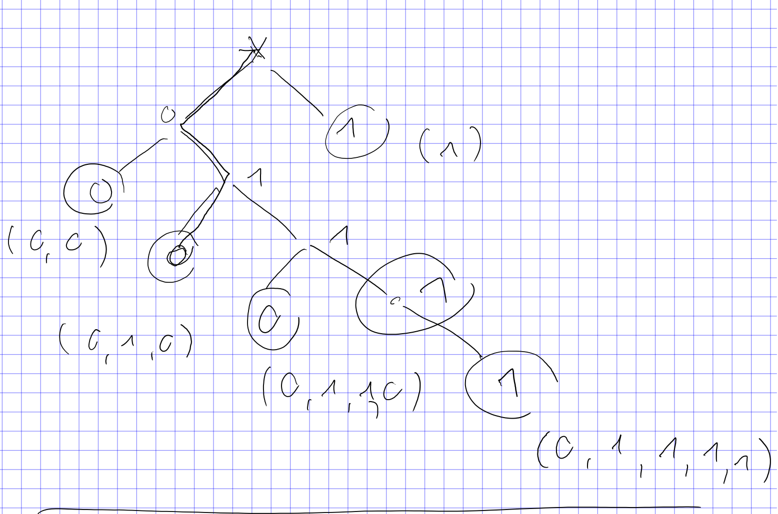


Beweis der Fano-Kraft-Ungl.

Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige Ber$(\frac{1}{2})$

$$\mathbb{P}((X_1,\dots,X_{\ell(a)}) = k(a)) = \frac{1}{2^{\ell(a)}}$$

Da es ein Präfix-Code ist, gilt $\mathbb{P}(\{k(a) = (X_1,\dots,X_{\ell(a)})\} \cap \{k(b) = (X_1,\dots,X_{\ell(b)})\}) \overset{(*)}{=} 0$

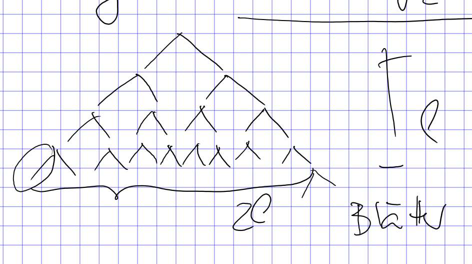
$$\Rightarrow \underline{\sum_{a\in S} 2^{-\ell(a)}} = \sum_{a\in S} \mathbb{P}(k(a) = (X_1,\dots X_{\ell(a)}))$$
$$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{a\in S} \{k(a) = (X_1,\dots,X_{\ell(a)})\}\Big)$$
$$\le \underline{1} \quad \square$$

Bsp: Gleichverteilte Buchstaben

S Alphabet, $|S| = 2^\ell$

$\rho(a) = 2^{-\ell(a)}$

Optimal: kürzeste mittlere Wortlänge: 01-Folgen der Länge $\underline{\ell = \log_2 2^{\ell(a)}}$



$\rightsquigarrow$ optimales Code

Existenz von Shannon-Codes.

Es gilt $\boxed{\ell(a) = \lceil -\log_2 \rho(a) \rceil}$
$\ge -\log_2 \rho(a)$

$$\sum_{a\in S} 2^{-\ell(a)} \le \sum_{a\in S} \rho(a) = 1$$
W-Vert.

$\Rightarrow$ für einen Shannon-Code ist die Fano-Kraft-Ungl. erfüllt $\Rightarrow$ es existiert ein Code mit der entsprechenden Längenfunktion. $\square$

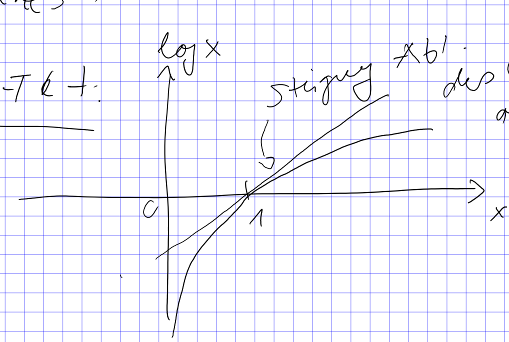
$$\underline{\mathbb{E}[\ell(X)]} = \sum_{a\in S} \lceil -\log_2 \rho(a) \rceil \rho(a)$$
$$\ge -\sum_{a\in S} \log_2 \rho(a) \cdot \rho(a)$$
$$=: \boxed{H_2[X]}$$

Entropie $\to$ siehe später

Beweis des Quellencodierungssatzes

$$H_2[X] - \mathbb{E}[\ell(X)]$$
$$\underset{\text{Def von } H_2, \mathbb{E}}{=} -\sum_{a\in S} \rho(a) \log_2 \rho(a) - \sum_{a\in S} \rho(a) \underbrace{\ell(a)}_{-\log_2 2^{-\ell(a)}}$$
$$= \sum_{a\in S} \rho(a) \left[-\log_2 \rho(a) + \log_2 2^{-\ell(a)}\right]$$
$$\underset{\text{Log-Gesetze } \rho(a)>0}{=} \sum_{a\in S} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} = (\circ)$$

Log-Fkt.:



log ist konkav, liegt also unterhalb ihrer Tangente (im Punkt $x = 1$). Daraus folgt:

$$\boxed{\log_2 x \le c(x-1)}$$
Gleichung der Tangenten an die $\log_2$-Fkt. in 1
$c = \log_2 e$

$\Rightarrow$ einsetzen in $(\circ)$

$$\underline{H_2[X] - \mathbb{E}[\ell(X)]} \le c \cdot \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \left(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1\right)$$
$$\le c\Big(\underbrace{\sum_{a\in S} 2^{-\ell(a)}}_{\le 1} - \overset{\sum_{a\in S}\rho(a)}{1}\Big)$$
$$\underset{\text{Fano-Kraft}}{\le} c \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H_2[X] \le \mathbb{E}[\ell(X)]}$$

Für Shannon-Codes: $\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\ell(X)] = \sum_{a\in S} \rho(a)\ell(a)$$
$$< -\sum_a \rho(a) \log_2 \rho(a) + \underbrace{\sum \rho(a)}_{=1}$$
$$= H_2[X] + 1 \quad \square$$

Beispiel: $\underline{S = \{a, b\}}$

Präfixcode: $k(a) = 0$, $k(b) = 1$

$\mathbb{E}[\ell(X)] = 1$

$\rho(a) = p \qquad \rho(b) = 1-p$, $p \in [0,1]$

$$\underline{H_2[X]} = \underline{-p \cdot \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)}$$

Spezialfall $\underline{p = \frac{1}{2}} = 1-p$

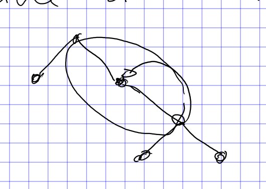
$$\underline{H_2[X]} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \underline{\mathbb{E}[\ell(X)]}$$

$\boxed{p = 1 \qquad 1-p = 0}$

$$\underline{H_2[X]} = -1 \underbrace{\log_2 1}_{=0} - \underbrace{0 \cdot \log_2 0}_{=0}$$
$$= \underline{0} \Rightarrow \underline{\mathbb{E}[\ell(X)] = H_2(X) + 1}$$

---

i) Codebaum voll:
d.h. keine Situation wie diese:



dann kann der Codebaum verkürzt werden, also auch die erwartete Wortlänge.

ii) Wären $a, b \in S$ mit $\rho(a) < \rho(b)$ aber $\ell(a) < \ell(b)$,

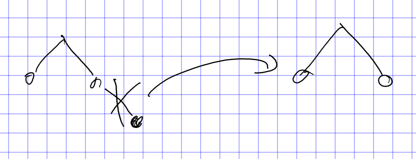
dann könnten a und b im Baum vertauscht werden, die erwartete Wortlänge würde dann verändert

$$\underline{\ell(a)\rho(b) + \ell(b)\rho(a)} - \ell(a)\rho(a) - \ell(b)\rho(b)$$
$$= -\underbrace{(\ell(b) - \ell(a))}_{\underline{>0}!}\underbrace{(\rho(b) - \rho(a))}_{>0}$$
$$< 0$$

also würde die erwartete Wortlänge im vertauschten Baum kürzer.

---

iii)



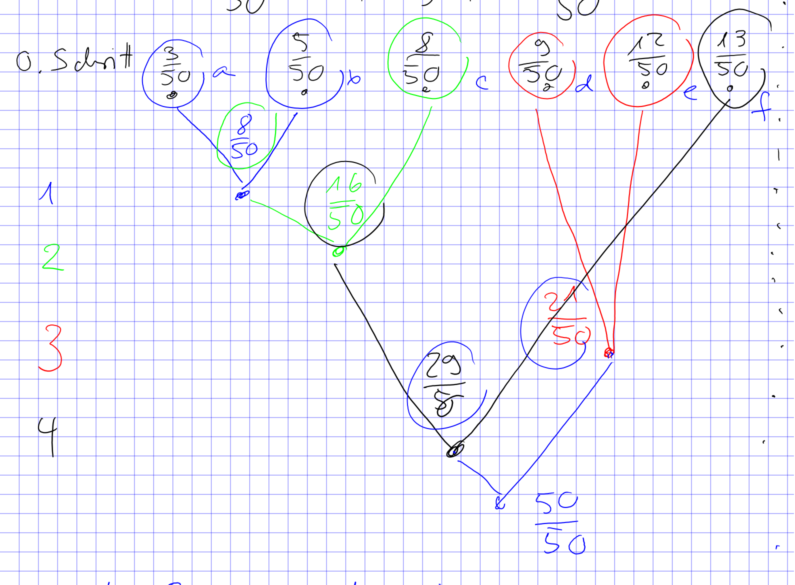
Huffman-Code: Beispiel

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$

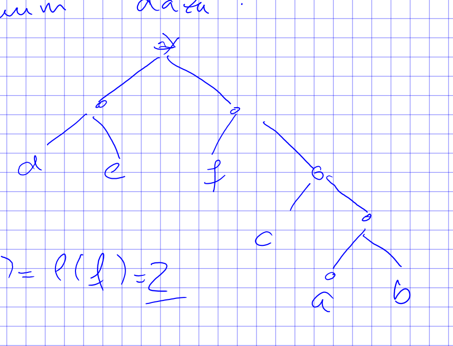
$\rho(a) = \frac{3}{50}$, $\rho(b) = \frac{5}{50}$

$\rho(c) = \frac{8}{50}$, $\rho(d) = \frac{9}{50}$

$\rho(e) = \frac{12}{50}$, $\rho(f) = \frac{13}{50}$



Code-Baum dazu:



$\ell(d) = \ell(e) = \ell(f) = \underline{2}$
$\ell(c) = 3$
$\ell(a) = \ell(b) = \underline{4}$

Einsetzen liefert: $\underline{\underline{\mathbb{E}[\ell(X)] = 2.48}}$

$H_2[X] = \underline{2.443}$

Shannon-Code: $\mathbb{E}[\ell(X)] = 3.02$