

Bsp. $X \sim \text{Ber}(p) \rightarrow g(1) = p, g(0) = 1-p$

$$H[X] = -p \log p - (1-p) \log(1-p) \\ = p \cdot \log \frac{1-p}{p} - \log(1-p)$$

X auf $\{1, \dots, n\} = S$ gleichverteilt

$$g(k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in S$$

$$\rightarrow H[X] = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -n \cdot \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} \\ = - \log 1 - (-\log n) = \log n$$

Beweis: Verwende wieder $\log x \leq c(x-1)$

Def. $c > 0$ geeignet

$$D(g||\pi) \stackrel{\text{Def.}}{=} - \sum_{a \in S} g(a) \log \frac{\pi(a)}{g(a)}$$

$$\geq -c \sum_{\substack{a \\ g(a) > 0}} g(a) \left(\frac{\pi(a)}{g(a)} - 1 \right)$$

$$\geq -c \sum_a (\pi(a) - g(a)) = 0$$

$$\sum_a \pi(a) = \sum_a g(a) = 1$$

Falls $\pi \neq g$: $\exists a \in S$ s.d. $\pi(a) \neq g(a)$

also $\frac{\pi(a)}{g(a)} \neq 1$, dann erhält

man strikte Ungleichheit. \square

Bsp: Entropienbrücke

S n -Elemente, $S = \{1, \dots, n\}$

$X \sim g$, $\pi =$ gleichvert. auf S .

$$\pi(a) = \frac{1}{n} \quad \forall a \in S$$

$$H[X] \leq - \sum_{a \in S} g(a) \log \pi(a)$$

$$= - \log n$$

$$= \sum_{a \in S} g(a) \log(n) = \log(n)$$

2) Geometrische Verteilung: $S = \mathbb{N}$

$$\pi(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2^{-a}, \quad a \in S$$

$$H[X] \leq - \sum_a g(a) \log 2^{-a} = -\log 2 \sum_a g(a) \cdot a$$

$$= \log 2 \cdot E[X], \quad X \sim g$$

Gemeinsame Entropie

Beweis

$$H[X] + H[Y] - H[X, Y]$$

$$= \sum_{a, b \in S} P(X=a, Y=b) \log \frac{P(X=a, Y=b)}{P(X=a) \cdot P(Y=b)}$$

Def. Entropie, Log-Gesetze ≥ 0 eine relative Entropie

$$= 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ unabhängig.}$$

Codieren von Wörtern

\hookrightarrow gebildet aus Buchst.

$$W_n = X_1 X_2 \dots X_n$$

nicht Multiplikation,

Aneinanderreihung.

$$H_2[W_n] \stackrel{\text{falls dist. w.}}{=} H_2[X_1] + \dots + H_2[X_n]$$

$$= n H_2[X], \quad \text{falls } X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. w.}$$

Optimale Codierung für ganze Wörter.

Quellencodierungssatz

$$H_2[W_n] \leq E[l(W_n)] < H_2[W_n] + 1$$

$$\Rightarrow H_2[X] = \frac{1}{n} H_2[W_n] \leq \frac{1}{n} E[l(W_n)]$$

$$< \frac{1}{n} H_2[W_n] + \frac{1}{n}$$

$$= H_2[X] + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow H_2[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[l(W_n)]}{n}$$

stationäre Quellen

$$h_Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_2[X_1, \dots, X_n]}{n}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_2[X_1] + \dots + H_2[X_n]}{n}$$

$$h_Q + H_2(X, Y) \leq H_2[X] + H_2[Y]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot H_2[X]}{n} = H_2[X]$$

$$\Rightarrow h_Q \leq H_2[X] \quad (\text{Gleichheit für unabh. } X_i)$$

$$H_2[X_1, \dots, X_n] \geq 0 \Rightarrow h_Q \geq 0$$

falls die X_i alle gleich (nicht nur gleichverteilt) $\rightarrow H_2[X_1, \dots, X_n] = H_2[X]$

optimales Codierungsverfahren für Wörter der Länge n .

Quellencodierungssatz: $n \cdot h_Q \approx E[l(W_n)]$

$$n \rightarrow \infty$$

Def. $r_Q = 1 - \frac{h_Q}{H_2[X]}$ relative Redundanz der Quelle. \square