Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Wintersemester 2023/24

Organisatorisches

Dozentin

- Prof. Dr. Noemi Kurt
- E-Mail: kurt@math.uni-frankfurt.de
- Die verbindliche Anmeldung zur Veranstaltung über QIS ist unbedingt erforderlich für alle, die an Klausuren teilnehmen möchten. Anmeldefrist: 16.10. bis 19.11.2023, Prüfungsnummer 25188.

Wichtig:
Alle Materialien werden über Moodle bereitgestellt: `https://moodle.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/moodle/course/view.php?id=5189`. Einen Link auf die Seite finden Sie auch im Vorlesungsverzeichnis (LSF).

Melden Sie sich mit Ihrem Studierendezugang auf der Moodle-Seite für den Kurs an, und stellen Sie sicher, dass Sie die hinterlegte E-Mail-Adresse regelmäßig lesen. Wichtige Informationen werden über Moodle kommuniziert.

Organisatorisches

Vorlesungsmaterial

- Skript: Link zum Skript von Dr. Peter Bauer auf der Moodle-Seite
- Folien: Jeweils kurz vor der Vorlesung auf der Moodle-Seite
- Beginn Übungen in der 2. Vorlesungswoche, Präsenzveranstaltung Freitag 8:30-9:15 (ab der 2. Woche)
- Online-Aufgaben: Wöchentlich auf der Moodle-Seite (Wiederholung Schulstoff, einfache Übungsaufgaben)
- Übungszettel: Wöchentlich auf der Moodle-Seite. Eigenständige Bearbeitung vor der Übungsstunde, Vorrechnen in der Übung. Wichtige Klausurvorbereitung!
- Online-Brückenkurs: Link siehe Moodle-Seite, freiwillige Ergänzung und Wiederholung Schulstoff.

Leistungsnachweis: Klausur

Termin 16. Februar 10:15-11:45 Raum N-N/B1 (Präsenzklausur)

Dauer, Voraussetzungen und Hilfsmittel

- Dauer: 60 Minuten
- Zulassungsvoraussetzungen: Erfolgreiche Teilnahme an den Übungen, Bearbeitung von mindestens 60% der Online-Übungsaufgaben, Anmeldung zur Vorlesung
- Anmeldung zur Klausur (zusätzlich zur Anmeldung zur Vorlesung): 29. 1. bis 11.2. 2024. Elektronische Anmeldung: Prüfungsnummer 25123.
- Hilfsmittel: Ein (beidseitig) handschriftlich beschriebenes A4-Blatt, sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner. Smartphones, Tablets, etc. dürfen nicht als Taschenrechnerersatz genutzt werden, internentfähige Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben.

Inhalte

- Rechentechniken, Grundlagen, Prozentrechnen, Mischungsrechnung (ca. 2 Wochen)
- Funktionen, logarithmische Skala, Transformationen (ca. 2-3 Wochen)
- Differentialrechnung, Ableitungsregeln, Extrema, partielle Ableitungen, Integrale (ca. 4-5 Wochen)
- Einführung in Wahrschenlichkeitstheorie und Statistik (ca. 5 Wochen)

Vorlesung 1

Inhalt

- Zahlenmengen
- Wiederholung Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- Verhältnisse, Einheiten, Prozentrechnung
- Mischungsrechnung

Lernziele

- Zahlenmengen und Intervallschreibweise kennen
- Mit Zehnerpotenzen und verschiedenen Zahlennotationen umgehen können
- Einfache Mischungsaufgaben berechnen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Rechentechniken, Schulmathematik
- Mengenschreibweise
- Prozentrechnung

Zahlenmengen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, abgeschloßen bezüglich der Addition und Subtraktion

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{r = \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$, Menge der Brüche. Abgeschlossen bezüglich Multiplikation und Division.

Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$, gesamte Zahlengerade, einschließlich $\sqrt{2}, \pi, ...$

Intervallschreibweise

Gewisse Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden so dargestellt:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a, b)$ offenes Intervall
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b)$ halboffenes Intervall
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a, b]$ halboffenes Intervall

Rechnen mit rationalen Zahlen

aka Bruchrechnen:

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$

Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, Multiplikation mit dem Kehrwert

Kürzen und Erweitern: $\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c}$.

Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ falls der Nenner gleich ist.
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ durch Erweitern gleichnamig machen.

Subtraktion: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{-d}$

Potenzen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Potenz von a

$$a^0 = 1, \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$$

a ist die Basis, n der Exponent. Rechenregeln: Für

$a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}$ gelten:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$, mit $a \geq 0$ falls q gerade ist, ist die q-te Wurzel von a definiert als die (nichtnegative) Lösung x von

$$x^q = a, \qquad x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

- Achtung: Vorzeichen!
- $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
- Wurzel als Potenz mit rationalem Exponent.
- Für negative a ist die Wurzel (in den reellen Zahlen) bei geradem Exponenten nicht definiert.

Logarithmus

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 1$. Der Logarithmus von a zur Basis b ist die (eindeutige) Lösung x von

$$b^x = a, \qquad x = \log_b a.$$

Rechenregeln für Logarithmen: Seien $b, c > 1, x, y > 0$.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$
- $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

Spezialfall: Der natürliche Logarithmus $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ ist der Logarithmus zur Basis $b = \mathrm{e} = 2,718281828459045...$ (Euler'sche Zahl).

Dezimalschreibweise und Zehnerpotenzen

Brüche und Dezimalschreibweise:

$$\frac{3}{4} = 0.75, \qquad \frac{2}{3} = 0.\overline{6}, \qquad \frac{11}{7} \approx 1.571429...$$

Wissenschaftliche Schreibweise: $a \cdot 10^b$

Symbol	Name	Wert	Symbol	Name	Wert
da	Deka	$10^1 = 10$	**d**	Dezi	$10^{-1} = 0.1$
h	Hekto	$10^2 = 100$	**c**	Zenti	$10^{-2} = 0.01$
k	Kilo	$10^3 = 1000$	**m**	Milli	$10^{-3} = 0.001$
M	Mega	10^6	μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	**n**	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	**p**	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	**f**	Femto	10^{-15}
E	Exa	10^{18}	**a**	Atto	10^{-18}
Z	Zetta	10^{21}	**z**	Zepto	10^{-21}
Y	Yotta	10^{24}	**y**	Yokto	10^{-24}

Anteile, Prozente

Prozent: $1\% = 0.01 = \frac{1}{100} = 1 \cdot 10^{-2}$

Promille: $1‰ = 0.001 = \frac{1}{1000} = 1 \cdot 10^{-3}$

Parts per million: $1\mathrm{ppm} = 0.000001 = \frac{1}{1000000} = 1 \cdot 10^{-6}$

Vorsicht: Bezugsgröße beachten!

Lösungen, Massenanteile

Eine Lösung besteht aus einem Stoff, der in einem Lösungsmittel gelöst ist. Der Gehalt (Konzentration, Anteil) einer Lösung kann auf unterschiedliche Weise angegeben werden.

(Definition) Der Massenanteil ("Gewichtsprozent") eines Stoffes A in einer Lösung Lsg ist

$$\omega(A) = \frac{m(A)}{m(\mathrm{Lsg})},$$

wobei $m(A)$ die Masse des gelösten Stoffes und $m(\mathrm{Lsg})$ die Masse der Lösung bezeichnet.

- Masse: Einheit $\mathrm{g}, \mathrm{kg}\ldots$
- Massenanteil: Prozent, Promille, ppm...

Menge und Massenanteile

Wichtig: Unterscheidung zwischen Lösung und Lösungsmittel, bzw. zwischen Massen und Massenanteilen:

- Löse ich 20g Stoff in 100g Lösungsmittel, so habe ich insgesamt 120g Lösung. Der Massenanteil ist dann $\frac{20}{120} \approx 0.166667 \approx 16.7\%$.
- Eine 20%ige Lösung enthält 20% des Stoffs, also 20g Stoff in 100g Lösung. Dazu benötigt man also 80g Lösungsmittel. Kontrolle: Der Massenanteil ist $\frac{20}{20+80} = \frac{20}{100} = 0.2 = 20\%$.

(Beispiel 2.1.3)

Verdünnen und Konzentrieren

Gesetz von der Erhaltung der Masse: Beim Verdünnen oder Konzentrieren einer Lösung bleibt die Masse des gelösten Stoffes gleich. Nur der Massenanteil wird durch Zugeben bzw. Entziehen von Lösungsmittel verändert.

(Beispiel 2.2.1).

Ansatz: Umformen der Formel

$$\omega(A) = \frac{m(A)}{m(\mathrm{Lsg})}$$

zu

$$m(\mathrm{Lsg}) = \frac{m(A)}{\omega(A)}.$$

Volumenkonzentration

Statt des Massenanteils betrachten wir nur die Volumenkonzentration.

(Definition) Die Volumenkonzentration ("Volumenprozent") eines Stoffes A in einer Lösung Lsg ist

$$\sigma(A) = \frac{V(A)}{V(\mathrm{Lsg})},$$

wobei $V(A)$ das Volumen des gelösten Stoffes und $V(\mathrm{Lsg})$ das Volumen der Lösung bezeichnet.

- Einheiten: Volumen als $l, ml, \ldots$, Volumenkonzentration als Dezimalzahl, oder $\frac{l}{l}, \frac{ml}{l}, \ldots$
- Volumenkonzentration wird vor allem für Lösungen von Alkohol verwendet, bei alkoholischen Getränken Angabe als "Vol.-%" (ansonsten unüblich).

Volumenkonzentration

Wichtig: Verschiedene Konzentrationen haben unterschiedliche Dichten, deshalb können Volumina nicht einfach addiert werden: Ein Liter Alkohol in einem Liter Wasser ergeben nicht zwei Liter Lösung.

Es gilt Massenerhaltung, nicht Volumenerhaltung.

Zusammenhang: Volumen $= \frac{\text{Masse}}{\text{Dichte}}$.

(Beispiel 2.3.3).