

# Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut\*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt  
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Wintersemester 2023/24

# Vorlesung 2

## Inhalt

- ▶ Mischungsgleichung, Mischungskreuz
- ▶ Funktionen, Definitionsbereiche, Wertebereiche
- ▶ Wichtige Funktionstypen (linear, Potenzfunktion)

## Lernziele

- ▶ Mit Massen und Massenanteilen für Lösungen rechnen können
- ▶ Die Mischungsgleichungen und das Mischungskreuz kennen
- ▶ Mit Funktionen, Definitions- und Wertebereichen umgehen können
- ▶ Wichtigste Funktionstypen und ihre Eigenschaften kennen

## Benötigte Vorkenntnisse

- ▶ Rechentechniken, Prozentrechnung, Bruchrechnen
- ▶ Mengen und Funktionen
- ▶ Rechenregeln, Potenzgesetze

## Erinnerung: Lösungen, Massenanteile

Eine **Lösung** besteht aus einem **Stoff**, der in einem **Lösungsmittel** gelöst ist. Der Gehalt (Konzentration, Anteil) einer Lösung kann auf unterschiedliche Weise angegeben werden.

(Definition) Der **Massenanteil** (“Gewichtsprozent”) eines Stoffes  $A$  in einer Lösung  $L_{sg}$  ist

$$\omega(A) = \frac{m(A)}{m(L_{sg})},$$

wobei  $m(A)$  die Masse des gelösten Stoffes und  $m(L_{sg})$  die Masse der Lösung bezeichnet.

- ▶ Masse: Einheit g, kg...
- ▶ Massenanteil: Prozent, Promille, ppm...

# Mischungen

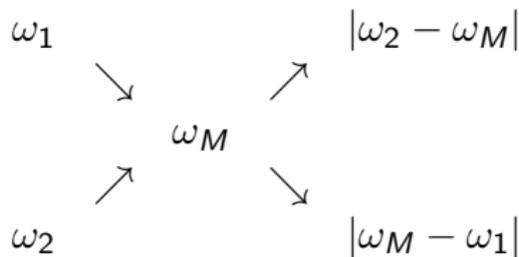
**Allgemeine Mischungsgleichung:** Sind  $m_1, m_2, \dots, m_k$  die Massen von  $k$  Lösungen mit den jeweiligen Massenanteilen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ , dann gilt für die Masse der Mischung dieser Lösungen  $m_M = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ , und den zugehörigen Massenanteil  $\omega_M$

$$\omega_M \cdot m_M = \omega_1 \cdot m_1 + \omega_2 \cdot m_2 + \dots + \omega_k \cdot m_k.$$

**Spezialfall:** Zwei Lösungen ergeben das Massenverhältnis

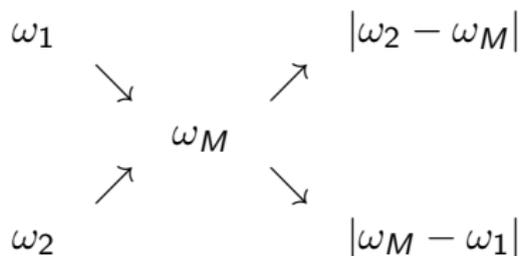
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_2 - \omega_M}{\omega_M - \omega_1}.$$

**Mischungskreuz:**



# Rechnen mit dem Mischungskreuz

Mischungskreuz:



- ▶ Mitte: Konzentration der zu mischenden Lösung
- ▶ Links (oben und unten): Konzentrationen der vorhandenen Lösung
- ▶ Rechnung: Subtraktion in Pfeilrichtung: Größerer Wert - kleinerer Wert
- ▶ Rechts (oben und unten): Ergebnisse der Subtraktion

**Ergebnis:** Das gewünschte **Massenverhältnis** entspricht dem Quotienten der Einträge auf der rechten Seite des Mischungskreuzes.

# Mischungsrechnung: Beispiele

- ▶ Bestimmung eines Massenverhältnisses (Bsp. 2.4.4)
- ▶ Bestimmung der zu mischenden Massen, bei vorgegebener Masse der Mischung (Bsp. 2.4.5)
- ▶ Bestimmung der zu mischenden Volumina, bei vorgegebenem Volumen der Mischung (Bsp. 2.4.6)
- ▶ Verdünnen und Konzentrieren unter Verwendung des Mischungskreuzes (Bsp. 2.4.7)

# Funktionen

- ▶ Eine **Funktion**  $f$  ist eine Vorschrift, die jedem Wert  $x$  aus einem **Definitionsbereich**  $D(f) \subseteq \mathbb{R}$  genau einen Wert  $f(x)$  zuordnet. Der maximale Definitionsbereich enthält dabei alle Zahlen  $x$ , für welche  $f(x)$  definiert ist.
- ▶ Der **Wertebereich** einer Funktion  $f$  ist die Menge aller Werte, welche  $f$  annehmen kann,

$$W(f) = \{y : \text{es gibt mindestens ein } x \text{ mit } f(x) = y\}.$$

- ▶ Der **Graph** von  $f$  ist die Darstellung der Paare  $x$  und  $f(x)$  in einem geeigneten Koordinatensystem.

## Geraden, lineare Funktionen

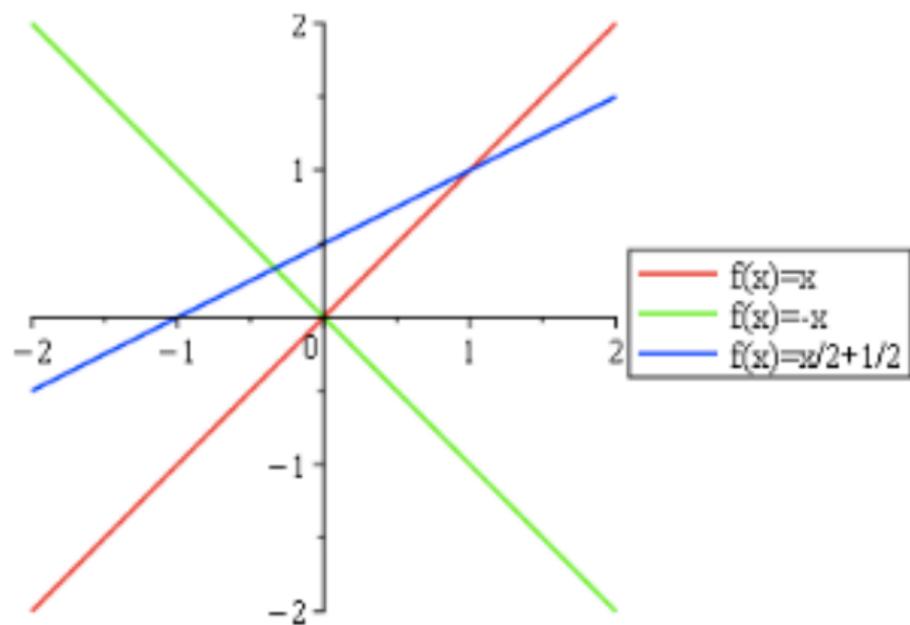


Abbildung 1:  $f(x) = x, -x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

# Geraden, lineare Funktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = ax + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

bilden **Geraden**.

- ▶ Bedeutung von der Parameter:  $a$  ist die **Steigung**,  $b$  der Achsenabschnitt (Verschiebung nach oben oder unten).
- ▶ Maximaler Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$
- ▶ Wertebereich:  $\mathbb{R}$
- ▶ Spezialfälle: Identität  $f(x) = x$ , konstante Funktion  $f(x) = b$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Lineare Funktionen sind Geraden mit  $b = 0$ .

# Potenzfunktionen

## Funktionen der Form

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{oder} \quad f(x) = ax^n, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

- ▶  $n$  der Exponent,  $a$  der Vorfaktor
- ▶ Maximaler Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$
- ▶ Wertebereich:  $\mathbb{R}$  falls  $n$  ungerade,  $[0, \infty[$  falls  $n$  gerade
- ▶ Spezialfälle: Quadratische Funktion  $f(x) = x^2$ , kubische Funktion  $f(x) = x^3$

# Potenzen

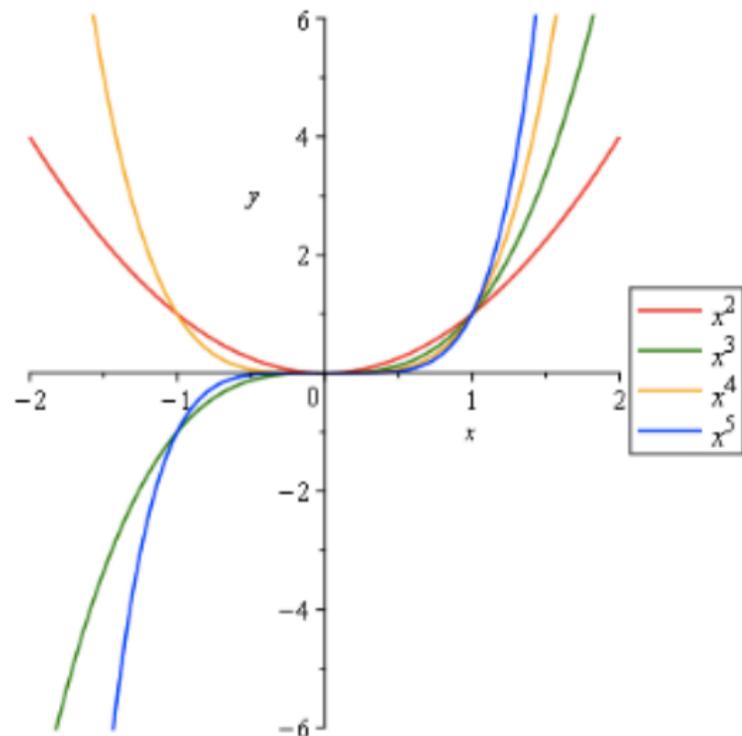


Abbildung 2:  $f(x) = x^2, x^3, x^4, x^5$

# Rechenregeln für Potenzen

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te **Potenz** von  $a$

$$a^0 = 1, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

$a$  ist die **Basis**,  $n$  der **Exponent**. **Rechenregeln**: Für

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$  gelten:

- ▶  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- ▶  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- ▶  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

# Wurzelfunktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- ▶ Maximaler Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$  falls  $n$  ungerade,  $[0, \infty[$  falls  $n$  gerade
- ▶ Wertebereich:  $\mathbb{R}$  falls  $n$  ungerade,  $[0, \infty[$  falls  $n$  gerade
- ▶ Spezialfall:  $f(x) = \sqrt{x}$

# Wurzelfunktionen

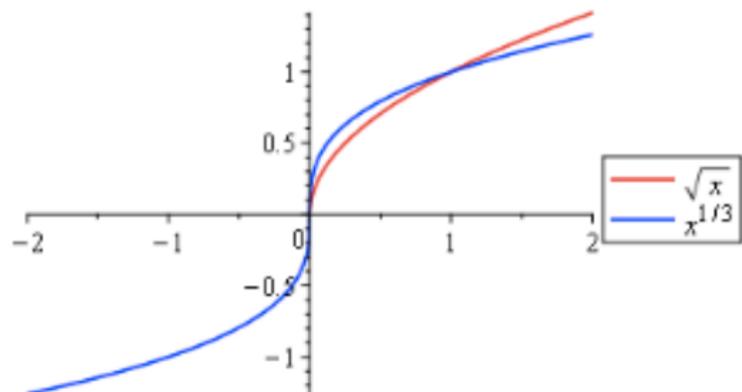


Abbildung 4:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

# Rechenregeln für Wurzeln

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , mit  $a \geq 0$  falls  $q$  gerade ist, ist die  $q$ -te **Wurzel** von  $a$  definiert als die (nichtnegative) Lösung  $x$  von

$$x^q = a, \quad x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

- ▶ Achtung: Vorzeichen!
- ▶  $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
- ▶ Wurzel als Potenz mit rationalem Exponent.
- ▶ Für negative  $a$  ist die Wurzel (in den reellen Zahlen) bei geradem Exponenten nicht definiert.

## Weitere wichtige Funktionen

- ▶ Kehrwert:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
maximaler Definitionsbereich: Reelle Zahlen außer 0,  
Wertebereich:  $\mathbb{R}$
- ▶ Negative Potenzfunktionen,  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- ▶ Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ , wobei

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$ , Wertebereich:  $[0, \infty[$