Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

Vorlesung 3

Inhalt

- Mischungsrechnung: Mischungskreuz, Beispiele
- Funktionen, Definitionsbereiche, Wertebereiche
- Wichtige Funktionstypen (linear, Potenzfunktion, Logarithmusfunktion, Exponentialfunktion)
- Rechnen mit Potenzen und Logarithmen

Lernziele

- Mit dem Mischungskreuz arbeiten können
- Mit Funktionen, Definitions- und Wertebereichen umgehen können
- Wichtigste Funktionstypen und ihre Eigenschaften kennen
- Mit Potenzen und Logarithmen umgehen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Mengen und Funktionen

Rechnen mit dem Mischungskreuz

Mischungskreuz:

$$
\begin{array}{ccccc}
\omega_1 & & & & |\omega_2 - \omega_M| \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \omega_M & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
\omega_2 & & & & |\omega_M - \omega_1|
\end{array}
$$

- Mitte: Konzentration der zu mischenden Lösung
- Links: Konzentrationen der vorhandenen Lösung
- Rechnung: Subtraktion in Pfeilrichtung: Größerer Wert - kleinerer Wert
- Rechts: Ergebnisse der Subtraktion

Ergebnis: Das gewünschte Massenverhältnis entspricht dem Quotienten der Einträge auf der rechten Seite des Mischungskreuzes.

Funktionen

- Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Wert x aus einem Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ genau einen Wert $f(x)$ zuordnet. Der maximale Definitionsbereich entält dabei alle Zahlen x, für welche $f(x)$ definiert ist.
- Der Wertebereich einer Funktion f ist die Menge aller Werte, welche f annehmen kann,

$$W(f) = \{y : \text{ es gibt mindestens ein } x \text{ mit } f(x) = y\}.$$

- Der Graph von f ist die Darstellung der Paare x und $f(x)$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

Geraden, lineare Funktionen

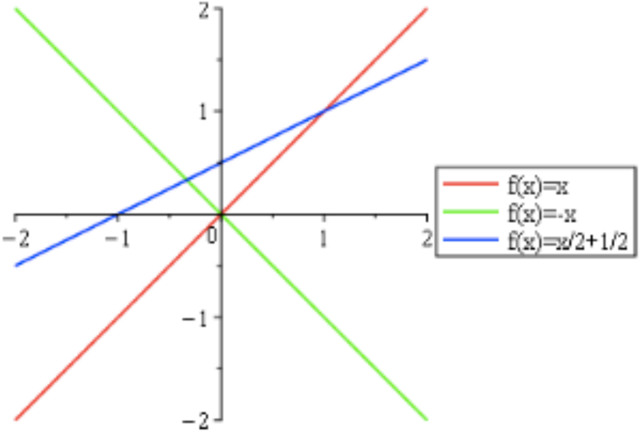

Abbildung 1: $f(x) = x, -x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Geraden, lineare Funktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = ax + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

bilden Geraden.

- Bedeutung von der Parameter: a ist die Steigung, b der Achsenabschnitt (Verschiebung nach oben oder unten).
- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$
- Spezialfälle: Identität $f(x) = x$, konstante Funktion $f(x) = b$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- Lineare Funktionen sind Geraden mit $b = 0$.

Potenzen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Potenz von a

$$a^0 = 1, \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; a \neq 0.$$

a ist die Basis, n der Exponent. Rechenregeln: Für

$a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}$ gelten:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potenzfunktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{oder} \quad f(x) = ax^n, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

- n der Exponent, a der Vorfaktor
- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$ falls n ungerade, $[0, \infty[$ falls n gerade
- Spezialfälle: Quadratische Funktion $f(x) = x^2$, kubische Funktion $f(x) = x^3$

Potenzen

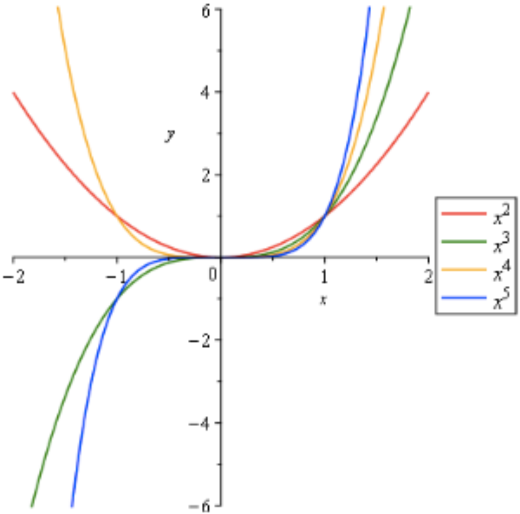

Abbildung 2: $f(x) = x^2, x^3, x^4, x^5$

Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$, mit $a \geq 0$ falls q gerade ist, ist die q-te Wurzel von a definiert als die (nichtnegative) Lösung x von

$$x^q = a, \qquad x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

- Achtung: Vorzeichen!
- $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
- Wurzel als Potenz mit rationalem Exponent.
- Für negative a ist die Wurzel (in den reellen Zahlen) bei geradem Exponenten nicht definiert.

Wurzelfunktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ falls n ungerade, $[0, \infty[$ falls n gerade
- Wertebereich: $\mathbb{R}$ falls n ungerade, $[0, \infty[$ falls n gerade
- Spezialfall: $f(x) = \sqrt{x}$

Wurzelfunktionen

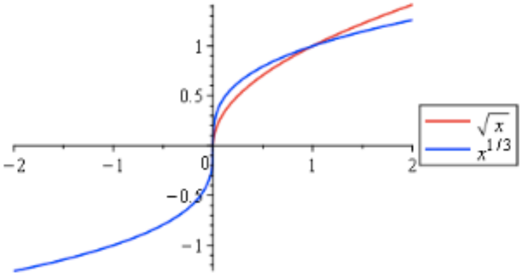

Abbildung 4: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Weitere wichtige Funktionen

- Kehrwert: $f(x) = \frac{1}{x}$,
  maximaler Definitionsbereich: Reelle Zahlen außer 0,
  Wertebereich: $\mathbb{R}$
- Negative Potenzfunkionen, $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$, wobei

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

  Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, Wertebereich: $[0, \infty[$
- Verknüpfung von Funktionen (Beispiele)
- Umkehrfunktionen (Beispiele)

Logarithmus

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 1$. Der Logarithmus von a zur Basis b ist die (eindeutige) Lösung x von

$$b^x = a, \qquad x = \log_b a.$$

Rechenregeln für Logarithmen: Seien $b, c > 1, x, y > 0$.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$
- $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

Spezialfall: Der natürliche Logarithmus $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ ist der Logarithmus zur Basis $b = \mathrm{e} = 2,718281828459045 23\ldots$ (Euler'sche Zahl).

Logarithmusfunktion

Funktionen der Form

$$f(x) = \log_b x, \quad b > 1$$

- Maximaler Definitionsbereich: $]0, \infty[$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$
- Spezialfall: $f(x) = \ln x$
- Eigenschaften: Wachsende Funktion, $\log_b 1 = 0$

Logarithmus

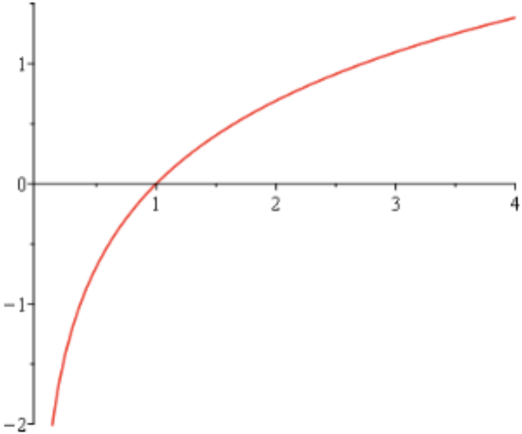

Abbildung 5: $f(x) = \ln x$

Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x,$$

mit $\mathrm{e} = 2.171281...$ die Euler'sche Zahl.

- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $]0, \infty[$
- Wachsende Funktion, $\mathrm{e}^0 = 1$
- Allgemeiner: $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$

Exponentialfunktion

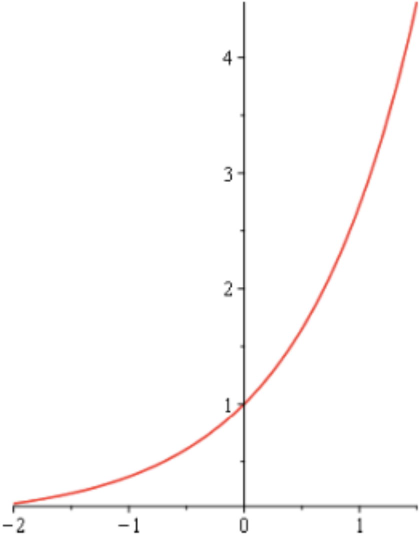

Abbildung 6: $f(x) = e^x$