Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Wintersemester 2023/24

Vorlesung 4

Inhalt

- Wurzel und Wurzelfunktion
- Exponentialfunktion
- Exponentielles Wachstum
- Wachstum und Zerfall: Modellierung und Berechnung

Lernziele

- Beispiele für exponentielles Wachstum kennen
- Wachstums- und Zerfallprozesse berechnen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Potenz- und Logarithmengesetze

Wurzeln

Für $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$, mit $a \geq 0$ falls q gerade ist, ist die q-te Wurzel von a definiert als die (nichtnegative) Lösung x von

$$x^q = a, \qquad x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

- Achtung: Vorzeichen!
- $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
- Wurzel als Potenz mit rationalem Exponent.
- Für negative a ist die Wurzel (in den reellen Zahlen) bei geradem Exponenten nicht definiert.

Wurzelfunktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ falls n ungerade, $[0, \infty[$ falls n gerade
- Wertebereich: $\mathbb{R}$ falls n ungerade, $[0, \infty[$ falls n gerade
- Spezialfall: $f(x) = \sqrt{x}$

Wurzelfunktionen

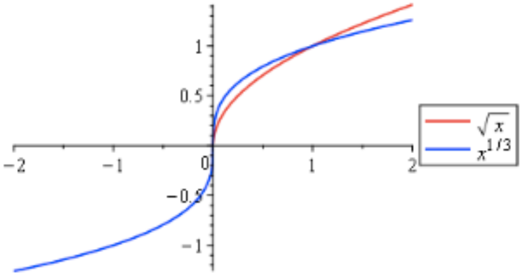

Abbildung 4: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Weitere wichtige Funktionen

- Kehrwert: $f(x) = \frac{1}{x}$,
  maximaler Definitionsbereich: Reelle Zahlen außer 0,
  Wertebereich: $\mathbb{R}$ ohne 0.
- Negative Potenzfunkionen, $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$, wobei

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

  Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, Wertebereich: $[0, \infty[$
- Verknüpfung von Funktionen (Beispiele)
- Umkehrfunktionen (Beispiele)

Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x,$$

mit $\mathrm{e} = 2.171281...$ die Euler'sche Zahl.

- Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $]0, \infty[$
- Wachsende Funktion, $\mathrm{e}^0 = 1$
- Allgemeiner: $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$

Exponentialfunktion

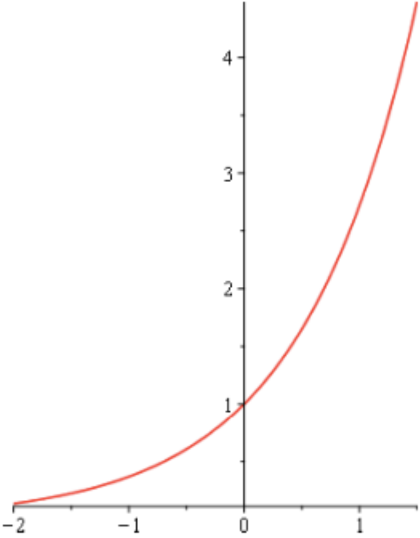

Abbildung 6: $f(x) = e^x$

Exponentielles Wachstum

Hintergrund: Bakterienwachstum durch Zellteilung - Verdoppelung zu festen Zeiten. Anzahl Bakterien: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^k$

Allgemeiner Ansatz für (exponentielle) Wachstumsprozesse:

$$f(t) = A \cdot \mathrm{e}^{Bt},$$

wobei t die Zeit, $f(t)$ die Anzahl (Bakterien o.ä.) und $A, B \geq 0$ Parameter sind.

Beispiel 3.1.2 Vermehrung von Vibrio Cholerae

In einem exponentiellen Wachstumsprozess mit $f(t) = A \cdot \mathrm{e}^{Bt}$ verdoppelt sich die Population jeweils nach der Zeit

$$t_D = \frac{\ln 2}{B}$$

(Verdoppelungszeit). Solche Prozesse treten auch z.B. bei der ungebremsten Ausbreitung von Infektionen auf.

Zerfallsprozesse (Reaktionen erster Ordnung)

Allgemeiner Ansatz für (exponentielle) Zerfallsprozesse:

$$f(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-Bt},$$

wobei t die Zeit und $A, B \geq 0$ Parameter sind. Diese Funktion fällt mit der Zeit.

Beispiel: Zerfall eine Stoffes bei einer Reaktion, in der die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur Menge des vorhandenen Stoffes ist (Reaktion erster Ordnung, Reaktionskonstante B).

In einem exponentiellen Zerfallsprozess mit $f(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-Bt}$ halbiert sich die Stoffmengejeweils nach der Zeit

$$t_D = \frac{\ln 2}{B}$$

(Halbwertszeit; vgl. auch radioaktiver Zerfall)

Logarithmische Skalen und Transformationen

Frage: Wie kann ich unterscheiden, ob eine wachsende Funktion eine Potenzfunktion (z.B. x^2) oder eine Exponentialfunktion (z.B. 2^x) ist?

- Beide Funktionen wachsen, die Exponentialfunktion deutlich schneller als die Potenzfunktion
- Sehe ich jedoch nur einen Teil des Graphen, oder kenne ich nur einige Werte, kann ich das schwer unterscheiden

Ansatz: Logarithmische Skalen

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2$$

Logarithmieren:

$$\ln f(x) = \ln(2^x) = x \ln(2) \qquad \ln g(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x$$

Damit ist $\ln f(x)$ eine lineare Funktion, $\ln g(x)$ eine logarithmische Funktion.

Beispiel: Arrhenius-Gleichung