Vorlesung 5

Inhalt

- Logarithmische Skalen
- Trigonometrische Funktionen
- Grenzwerte von Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Lernziele

- Mit logarithmischen Transformationen rechnen können
- Die trigonometrischen Funktionen kennen und mit ihnen rechnen können
- Grenzwerte von Funktionen bestimmen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Rechenregeln, Zahlenmengen, Funktionen und Definitionsbereiche, Logarithmen und Logarithmengesetze

Logarithmische Skalen und Transformationen

Frage: Wie kann ich unterscheiden, ob eine wachsende Funktion eine Potenzfunktion (z.B. x^2) oder eine Exponentialfunktion (z.B. 2^x) ist?

- Beide Funktionen wachsen, die Exponentialfunktion deutlich schneller als die Potenzfunktion
- Sehe ich jedoch nur einen Teil des Graphen, oder kenne ich nur einige Werte, kann ich das schwer unterscheiden

Ansatz: Logarithmische Skalen

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2$$

Logarithmieren:

$$\ln f(x) = \ln(2^x) = x\ln(2) \qquad \ln g(x) = \ln(x^2) = 2\ln x$$

Damit ist $\ln f(x)$ eine lineare Funktion, $\ln g(x)$ eine logarithmische Funktion.

Beispiel: Arrhenius-Gleichung

Logarithmische Skalen und Transformationen

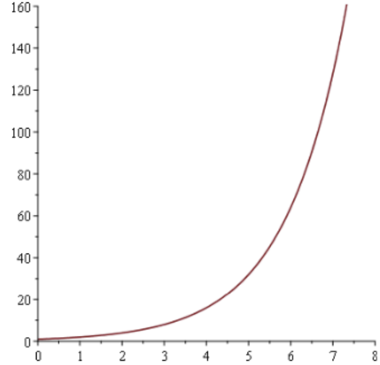


Abbildung 10: $f(x) = 2^x$ mit linearer y-Skala

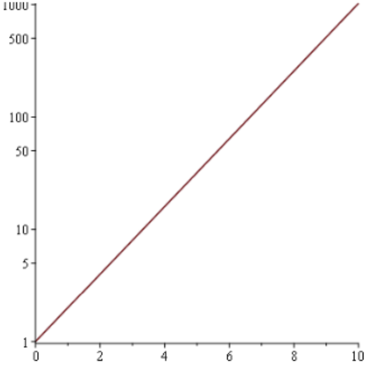


Abbildung 11: $f(x) = 2^x$ mit logarithmischer y-Skala

Logarithmische Skalen und Transformationen

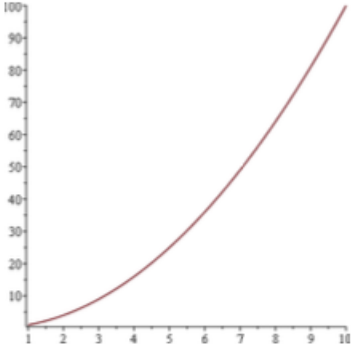


Abbildung 12:
$f(x) = x^2$ mit linearen Skalen

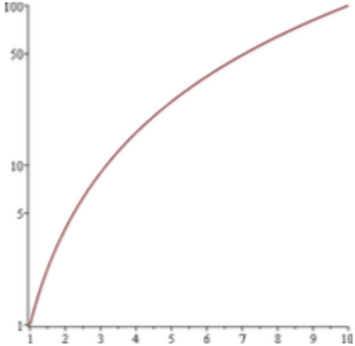


Abbildung 13:
$f(x) = x^2$ mit logarithmischer y-Skala

Potenzfunktion mit doppelt-logarithmischer Skala

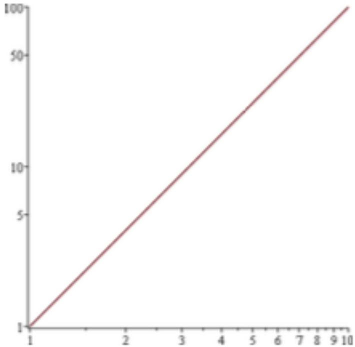
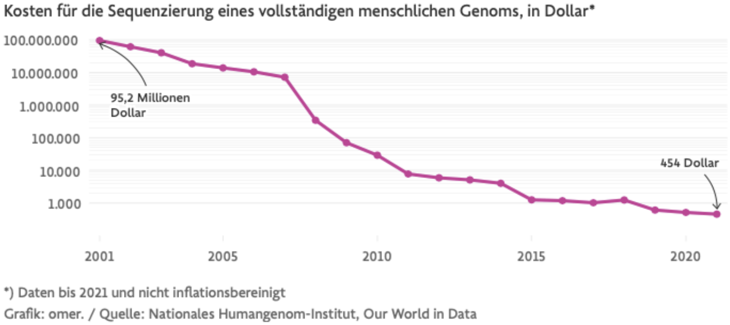


Abbildung 14:
$f(x) = x^2$ mit doppeltlogarithmischer Skalierung (logarithmische x- und y-Achse)

Beispiel für logarithmische Skala

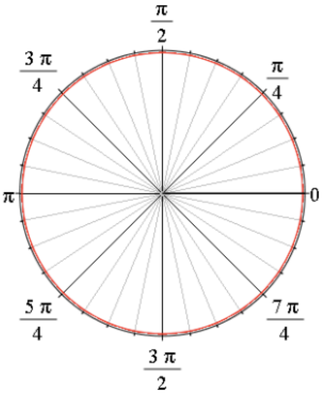


(Quelle: faz.net, 10. 5. 2023)

Winkel im Bogenmaß

Bekannt: Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist gleich 2π, mit $\pi \approx 3.1415926...$

Deshalb: Winkel im Bogenmaß mit Werten in $[0, 2\pi[$



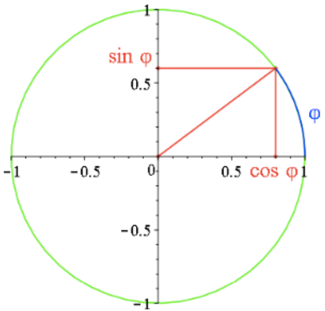
Taschenrechner: Deg↔Rad

Trigonometrische Funktionen

Kreis mit Radius 1, $x \in [0, 2\pi[$ Winkel im Bogenmaß

$\sin x$ =Länge der Gegenkathete von x, Sinusfunktion

$\cos x$ =Länge der Ankathete von x, Cosinusfunktion

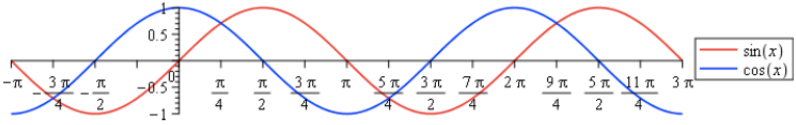


$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, Tangensfunktion

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, Cotangensfunktion

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus: Definitionsbereiche: $\mathbb{R}$ für Sinus und Cosinus (periodische Fortsetzung). Wertebereich $[-1, 1]$.



Eigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Tangens und Cotangens: Definitionsbereiche: $\mathbb{R}$ ohne die Stellen, an denen der Nenner 0 ist. Wertebereiche: $\mathbb{R}$.

Umkehrfunktionen: $\arcsin, \arccos, \arctan$, jeweils nur auf geeigneten Intervallen definiert.

Modellierung mit trigonometrischen Funktionen

Verwendung für periodische Ereignisse, z.B. Schwingungen (Physik), jährlich schwankende Wetterphänomene (Temperatur, Sonnenscheindauer...), ...

Ansatz als Sinusfunktion:

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D$$

mit A, B, C, D Parameter, welche aus den Daten zu bestimmen sind. Es gilt: B die Periodendauer (Bogenmaß), A die Amplitude (Maximum-Minimum)/2, C die Verschiebung des Nulldurchgangs, D die Verschiebung der Funktion (Maximum+Minimum)/2.
bzw. als Cosinusfunktion

$$f(x) = A \cdot \cos(B(x - C)) + D$$

(analoge Interpretation der Werte, zu berücksichtigen sind die unterschiedlichen Verschiebungen).

Grenzwerte von Funktionen

Definition Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$. Falls ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ existiert, so dass der Abstand von b zum Funktionswert $f(x)$ beliebig klein wird, falls x nah genug an a ist, so heißt b Grenzwert von f in a, Schreibweise:

$$\lim_{x \to a} f(x) = y.$$

- a muss dabei selbst nicht unbedingt im Definitionsbereich von f liegen.
- Manchmal betrachtet man nur linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte (z.B. für $a = \pm\infty$).
- Beispiele an der Tafel.