Vorlesung 6

Inhalt

- Grenzwerte von Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit
- Ableitungsregeln

Lernziele

- Grenzwerte von Funktionen bestimmen können
- Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit überprüfen können
- Ableitungsregeln kennen und anwenden können

Benötigte Vorkenntnisse

- Rechenregeln, Zahlenmengen, Funktionen und Definitionsbereiche

Grenzwerte von Funktionen

Definition Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$. Falls ein Punkt $b \in \mathbb{R}$ existiert, so dass der Abstand von b zum Funktionswert $f(x)$ beliebig klein wird, falls x nah genug an a ist, so heißt b Grenzwert von f in a, Schreibweise:

$$\lim_{x \to a} f(x) = y.$$

- a muss dabei selbst nicht unbedingt im Definitionsbereich von f liegen.
- Manchmal betrachtet man nur linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte (z.B. für $a = \pm\infty$).
- Beispiele an der Tafel.

Stetigkeit

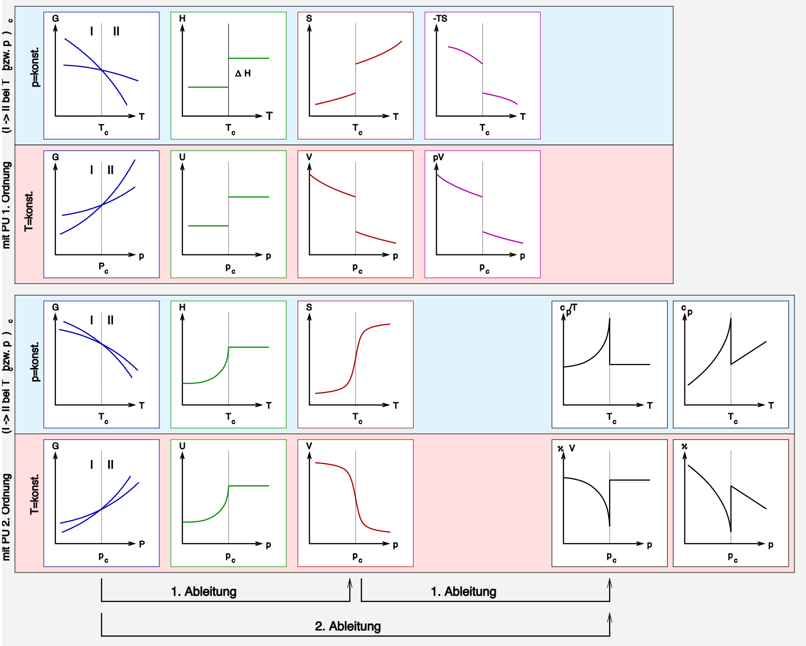
Definition Eine Funktion f ist an der Stelle $a \in D(f)$ stetig, falls der Grenzwert von f im Punkt a existiert mit

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ist f in allen Punkten einer Menge M stetig, so heißt f stetig in M. Ist f in allen Punkten seines Definitionsbereichs stetig, so heißt f stetig.

- Stetigkeit bedeutet, dass es keine abrupten Änderungen der Funktionswerte gibt, keine Sprünge
- Beispiele an der Tafel
- Sind f und g in x stetig, so ist auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g in x stetig (letzteres nur, falls $g(x) \neq 0$).

Stetigkeit und Unstetigkeit - Phasenübergänge



Differenzierbarkeit

Definition Eine Funktion f ist an der Stelle $a \in D(f)$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{a \to x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

existiert. Ist f in allen Punkten einer Menge M differenzierbar, so heißt f differenzierbar in M. Ist f in allen Punkten seines Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

- $f'(a)$ definiert als der obige Grenzwert heißt Ableitung von f in a. Für differenzierbares f ist die Funktion f' die Ableitung.
- $f'(a)$ enspricht der Steigung oder lokalen Veränderung der Funktion f im Punkt a.
- $f''(a)$ definiert als Ableitung von f' (sofern diese existiert) ist die zweite Ableitung, sie entspricht der Krümmung von f in a.
- Ist f differenzierbar in a, so ist f dort auch stetig.
- Beispiele an der Tafel.

Höhere Ableitungen, Stetigkeit

- $f''(a)$ definiert als Ableitung von f' (sofern diese existiert) ist die zweite Ableitung, sie entspricht der Krümmung von f in a.
- Analog können noch höhere Ableitungen definiert werden, $f''', f^{(4)}, \ldots$
- Ist f differenzierbar in a, so ist f dort auch stetig.

Ableitungen wichtiger Funktionenklassen

- Geraden: $f(x) = ax + b$, dann ist $f'(x) = a$.
- Konstanten: $f(x) = c$, dann ist $f'(x) = 0$.
- Potenzen: $f(x) = a \cdot x^n$, dann ist $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.
- Summenregel: Sind f und g differenzierbar, so ist $f(x) + g(x)$ auch differenzierbar, und hat die Ableitung

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

- Beispiel: Polynome

Ableitungen wichtiger Funktionen

- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- Ableitungen von Arcsin, Arccos, Artcan und Arccot siehe Skript.

Ableitungsregeln

Produktregel Seien f und g differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar, mit

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beispiele an der Tafel

Quotientenregel Seien f und g differenzierbar. Falls $g(x) \neq 0$ ist, so ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar, mit

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beispiele an der Tafel

Kettenregel

Seien h und g differenzierbar. Dann ist

$$f(x) = g(h(x))$$

differenzierbar, mit

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Dabei nennt man g' die äußere Ableitung, h' die innere Ableitung.

Beispiele an der Tafel.