Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeut*innen

Prof. Dr. Noemi Kurt
FB 12, Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sommersemester 2023

Vorlesung 7

Inhalt

- Ableitung, Kettenregel
- Extremwerte, Kurvendiskussion

Lernziele

- Die Ableitungsregeln, insbesondere die Kettenregel, anwenden können
- Den Zusammenhang zwischen Ableitung und Eigenschaften der Funktion kennen
- Extremwerte bestimmen können

Benötigte Vorkenntnisse

- Funktionen, Ableitung, Ableitungsregeln

Differenzierbarkeit

Definition Eine Funktion f ist an der Stelle $a \in D(f)$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{a \to x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

existiert. Ist f in allen Punkten einer Menge M differenzierbar, so heißt f differenzierbar in M. Ist f in allen Punkten seines Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

- $f'(a)$ definiert als der obige Grenzwert heißt Ableitung von f in a. Für differenzierbares f ist die Funktion f' die Ableitung.
- $f'(a)$ enspricht der Steigung oder lokalen Veränderung der Funktion f im Punkt a.
- $f''(a)$ definiert als Ableitung von f' (sofern diese existiert) ist die zweite Ableitung, sie entspricht der Krümmung von f in a.

Ableitungen wichtiger Funktionenklassen

- Geraden: $f(x) = ax + b$, dann ist $f'(x) = a$.
- Konstanten: $f(x) = c$, dann ist $f'(x) = 0$.
- Potenzen: $f(x) = a \cdot x^n$, dann ist $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Ableitungsregeln

Produktregel Seien f und g differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar, mit

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beispiele an der Tafel

Quotientenregel Seien f und g differenzierbar. Falls $g(x) \neq 0$ ist, so ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar, mit

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beispiele an der Tafel

Kettenregel

Seien h und g differenzierbar. Dann ist

$$f(x) = g(h(x))$$

differenzierbar, mit

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Dabei nennt man g' die äußere Ableitung, h' die innere Ableitung.

Beispiele an der Tafel.

Anwendung der Kettenregel

- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \ln f(x))'$ (falls $f(x) > 0$ ist).

Extremwerte

Sei f eine Funktion, und a ein Punkt aus dem Definitionsbereich von f.

- f hat in a ein lokales Minimum, falls $f(a) \leq f(x)$ für alle x in einer kleinen Umgebung von a gilt.
- f hat in a ein lokales Maximum, falls $f(a) \geq f(x)$ für alle x in einer kleinen Umgebung von a gilt.
- Umgebung bedeutet dabei die Menge aller x, so dass der Abstand von x zu a kleiner als eine feste Zahl $\varepsilon > 0$ ist.
- (Bild an der Tafel)

- Bei einem Maximum wächst f links von a und fällt rechts von a.
- Umgekehrt bei einem Minimum.
- Somit ändert die Steigung f' in a das Vorzeichen, es gilt als $f'(a) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für Extrema

(Satz) Es sei f zweimal differenzierbar, mit $f'(a) = 0$.

- Ist $f''(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Maximum
- Ist $f''(a) > 0$, so hat f in a ein lokales Minimum.

Falls $f''(a) = 0$ ist, sind weitere Untersuchungen notwendig.

Ein Punkt a in dem $f'(a) = 0$ ist, heißt kritischer Punkt.

(Beispiele an der Tafel)