Vorlesung 9

Inhalt

- Differentialgleichungen: Wichtige Typen und Lösungen
- Daten und ihre Darstellungen

Lernziele

- Wichtige Differentialgleichungstypen (Reaktionsgleichungen) und Lösungen kennen
- Überprüfen können, ob eine vorgegebene Funktion eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt.
- Typen von Daten und wichtige Kenngrößen kennen.

Benötigte Vorkenntnisse

- Funktionen, Ableitung, Ableitungsregeln

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (DGLn) stellen einen Zusammenhang zwischen Funktionen und ihren Ableitungen her. Sie sind omnipräsent in der mathematischen Beschreibungen von natürlichen Prozessen.

Beispiel: In vielen chemischen Reaktionen ist die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen Stoffmenge (Reaktionen 1. Ordnung). Nimmt also mit Dauer des Versuchs die Konzentration ab, so verringert sich auch die Geschwindigkeit.

- Sei $c(t)$ die Konzentration des Stoffes in Abhängigkeit von der Zeit t
- Reaktionsgeschwindigkeit entspricht der zeitlichen Veränderung der Konzentration, also $-c'(t)$ (Vorzeichen!).
- Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur Konzentration bedeutet also: Es gibt eine Zahl k, so dass

$$c'(t) = -k \cdot c(t)$$

Reaktionsgleichung 1. Ordnung

Gesucht ist also eine Funktion $c(t)$, welche die Differentialgleichung

$$c'(t) = -kc(t)$$

erfüllt.

Lösung:

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-kt}$$

erfüllt diese DGL für jede Zahl $c_0 \in \mathbb{R}$. Wir müssen hier $c_0 = c(0)$ die Anfangskonzentration wählen.

Zur Erinnerung: Dies entspricht einem exponentiellen Zerfall!

k ist die Reaktionskonstante (Einheit: 1/sec, 1/min...)

Reaktionen 0. Ordnung

Reaktion 0. Ordnung: DGL

$$c'(t) = -k$$

Łösung:

$$c(t) = c_0 - kt$$

mit $c_0 = c(0)$ Anfangskonzentration. Hier ist die Reaktionsgeschwindigkeit unabhängig von der Stoffmenge.

Reaktion 2. Ordnung

Reaktion 2. Ordnung mit gleicher Konzentration: DGL

$$c'(t) = -kc(t)^2$$

Lösung:

$$c(t) = \frac{1}{1/c_0 + kt},$$

mit $c_0 = c(0)$.

Allgemeiner: Zwei Reaktanden mit Konzentration c_A, c_B:

$$c_A'(t) = -kc_A(t)c_B(t), \quad c_B'(t) = -kc_A(t)c_B(t)$$

hier handelt es sich um zwei gekoppelte Differentialgleichungen.

Ein Beispiel für partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen enthalten partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen.

Beispiel: Diffusion (erstes Fick'sches Gesetz)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -DA\frac{\partial c}{\partial x},$$

Dabei ist $\frac{\partial m}{\partial t}$ die Masse, welche pro Zeiteinheit t durch die Fläche A (z.B.) Membran, und $\frac{\partial c}{\partial x}$ der Konzentrationsgradient entgegen der Flußrichtung.Die Zahl D ist die Diffusionskonstante (abhängig von der Substanz).

Beispiel: Diffusion (zweites Fick'sches Gesetz) Aus dem ersten Fick'schen Gesetz und der Massenerhaltung ($\frac{\partial c}{\partial t} = -A\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial t}$) folgt

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Deskriptive Statistik: Daten und ihre Darstellungen

It is easy to lie with statistics.

Andrejs Dunkels

It is easy to lie with statistics.
It is hard to tell the truth without it.

Andrejs Dunkels

Was ist Statistik?

Die Natur ist voller Variabilität.

Wie geht man mit variablen Daten um?

Es gibt eine mathematische Theorie des Zufalls:
die Stochastik.

Idee der Statistik

Variabilität

(Erscheinung der Natur)

durch

Zufall

(mathematische Abstraktion)

modellieren.

Statistik

=

Datenanalyse

mit Hilfe

stochastischer Modelle

Beispiel

Daten aus einer Diplomarbeit aus 2001 am Forschungsinstitut Senckenberg, Frankfurt am Main

Crustaceensektion

Leitung: Dr. Michael Türkay

Katrin Kronenberger and Michael Türkay, A population study of *Galathea intermedia* in the German Bight, *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom* 83:133–141, (2003).

Der Springkrebs

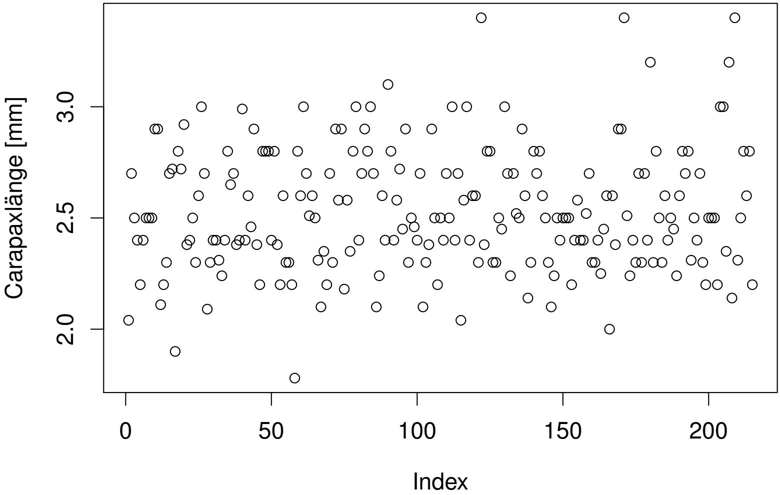
Galathea intermedia

Helgoländer Tiefe Rinne,
Fang vom 6.9.1988

Carapaxlänge (mm):
Nichteiertragende Weibchen ($n = 215$)

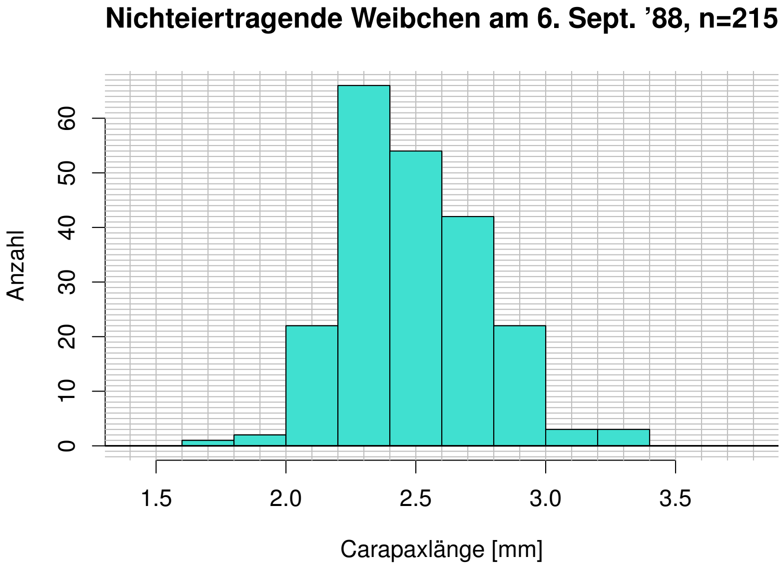
2,9	3,0	2,9	2,5	2,7	2,9	2,9	3,0
3,0	2,9	3,4	2,8	2,9	2,8	2,8	2,4
2,8	2,5	2,7	3,0	2,9	3,2	3,1	3,0
2,7	2,5	3,0	2,8	2,8	2,8	2,7	3,0
2,6	3,0	2,9	2,8	2,9	2,9	2,3	2,7
2,6	2,7	2,5	.	.	.	.	.

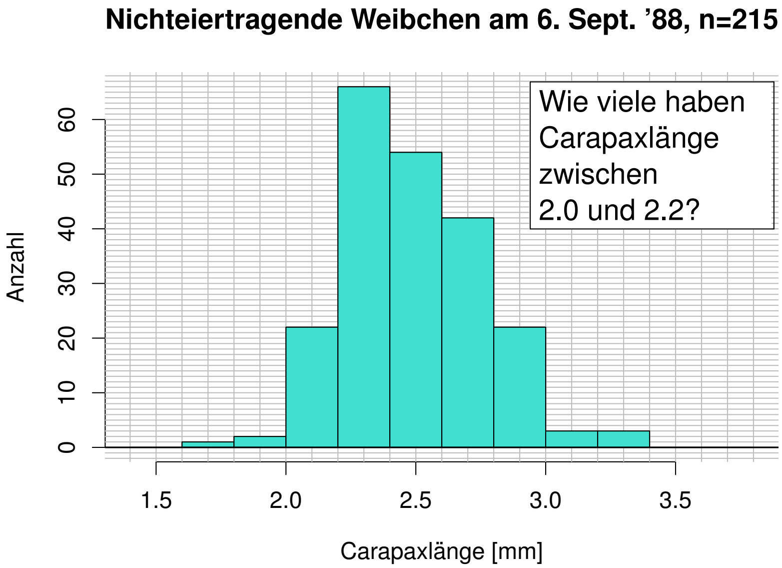
Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215

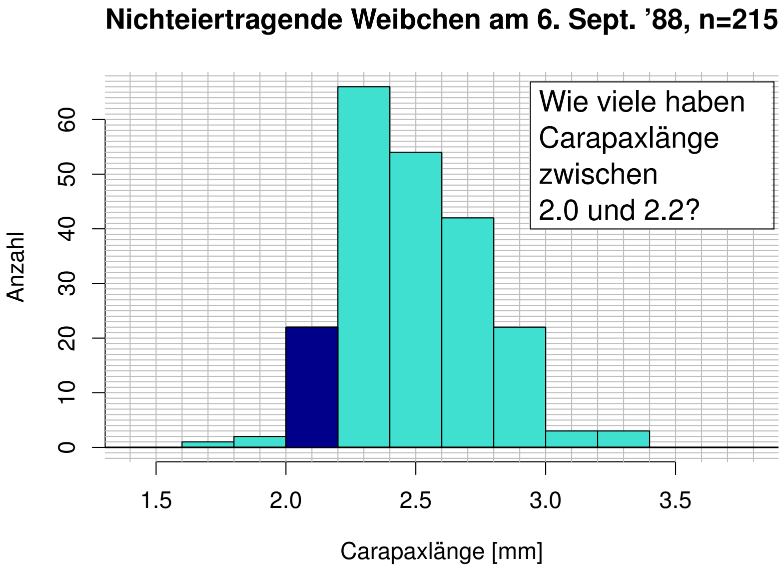


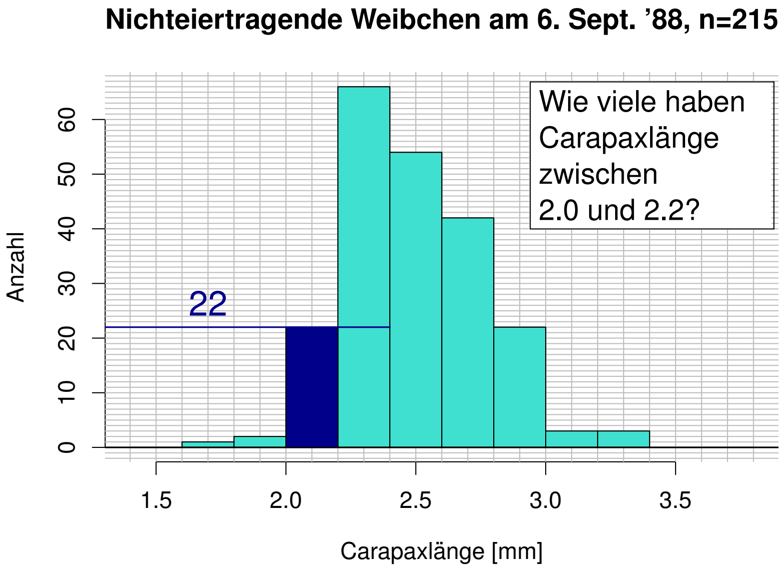
Eine Möglichkeit der graphischen Darstellung:

das Histogramm


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

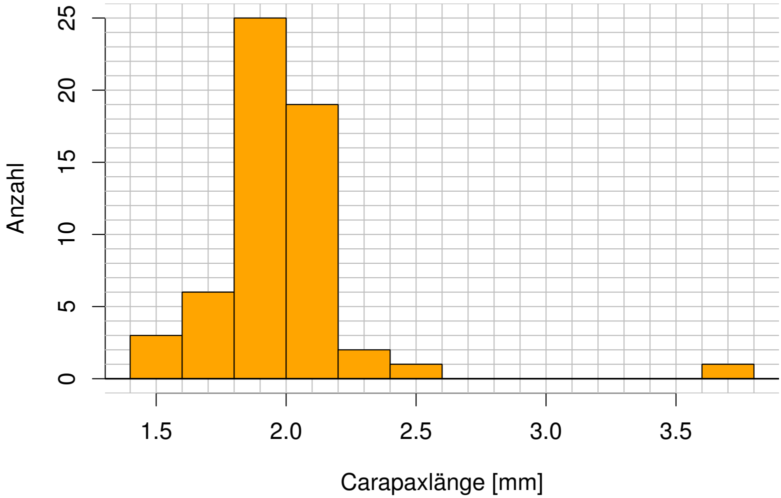

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Wie viele haben Carapaxlänge zwischen 2.0 und 2.2?
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Wie viele haben Carapaxlänge zwischen 2.0 und 2.2?
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

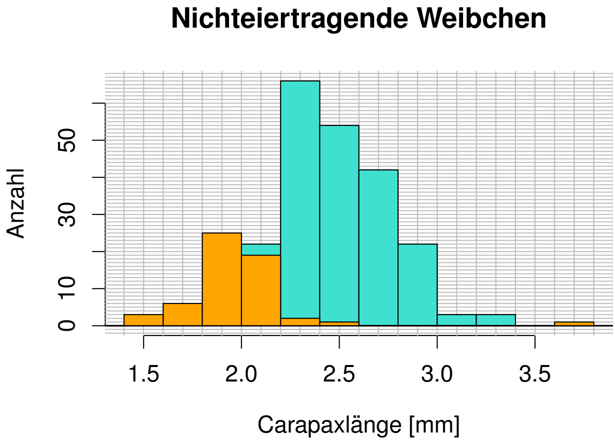

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Wie viele haben
Carapaxlänge
zwischen
2.0 und 2.2?
22
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Analoge Daten zwei Monate später (3.11.88):

Nichteiertragende Weibchen am 3. Nov. ’88, n=57

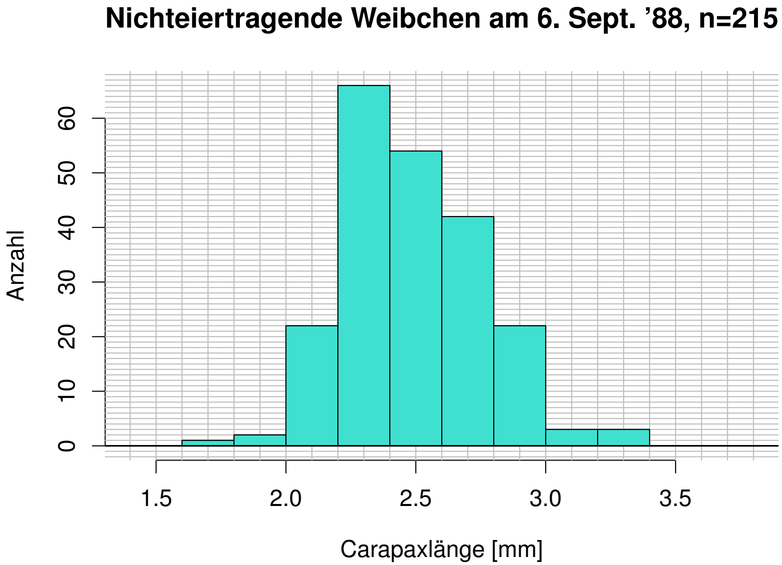


Vergleich der beiden Verteilungen

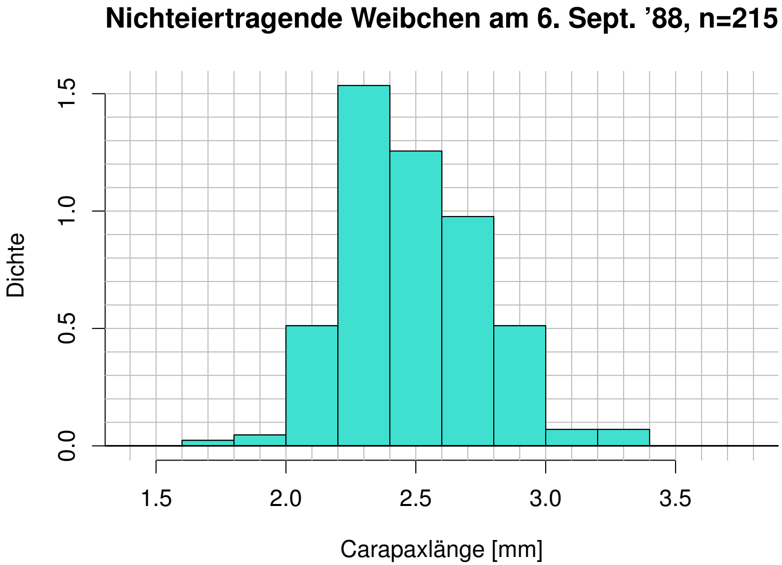


Problem: ungleiche Stichprobenumfänge: 6.Sept: $n = 215$
3.Nov : $n = 57$

Idee: stauche vertikale Achse so, dass Gesamtfläche = 1.

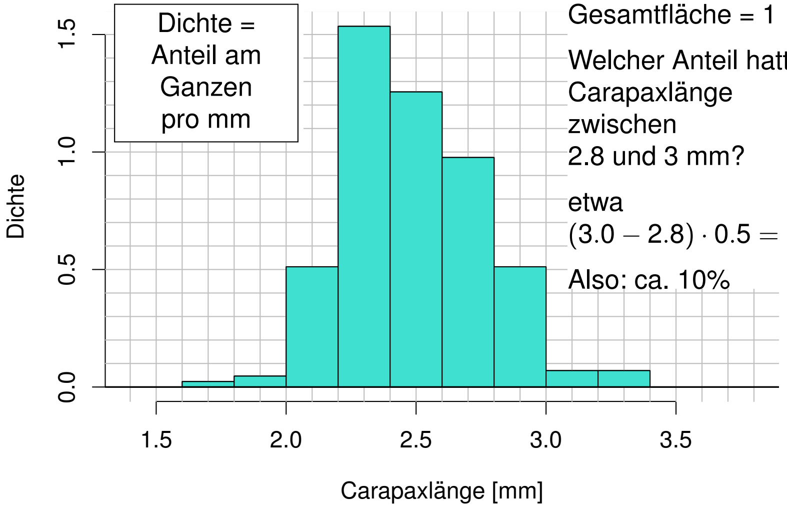


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Die neue
vertikale Koordinate
ist jetzt eine
Dichte
(engl. density).

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215



Gesamtfläche = 1

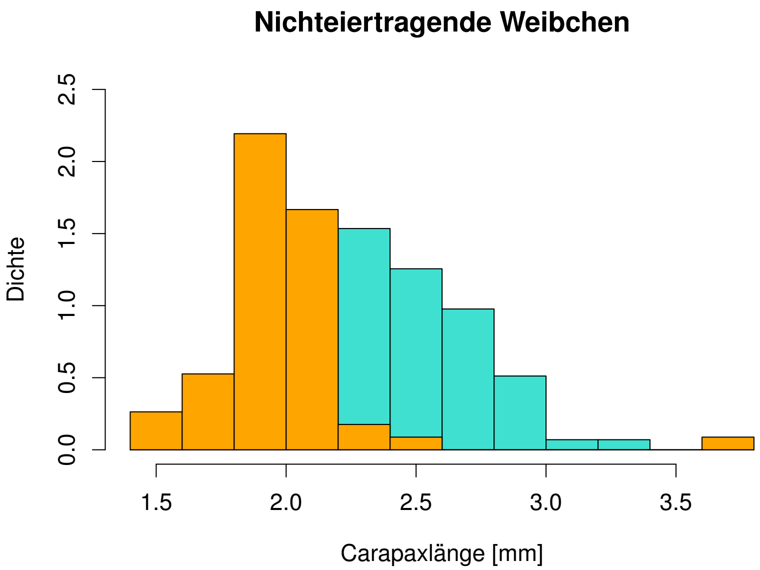
Welcher Anteil hatte Carapaxlänge zwischen 2.8 und 3 mm?

etwa $(3.0 - 2.8) \cdot 0.5 = 0.1$

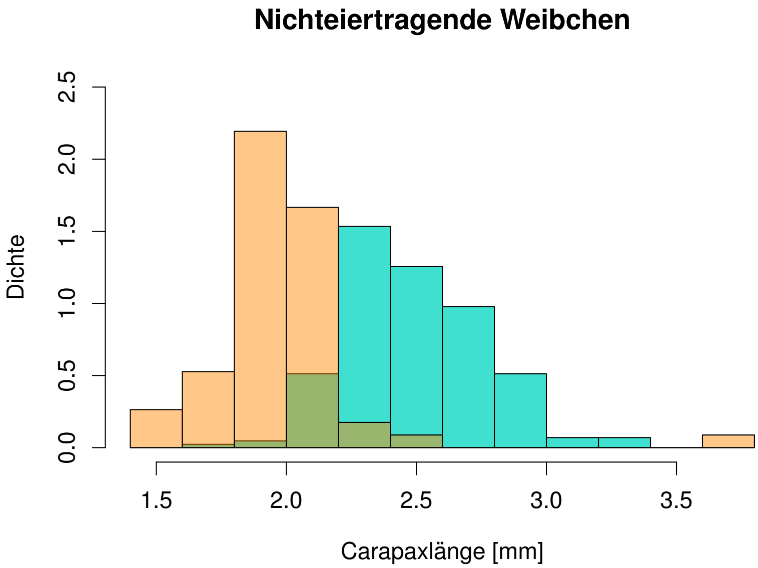
Also: ca. 10%

Die beiden Histogramme sind jetzt vergleichbar
(sie haben dieselbe Gesamtfläche).

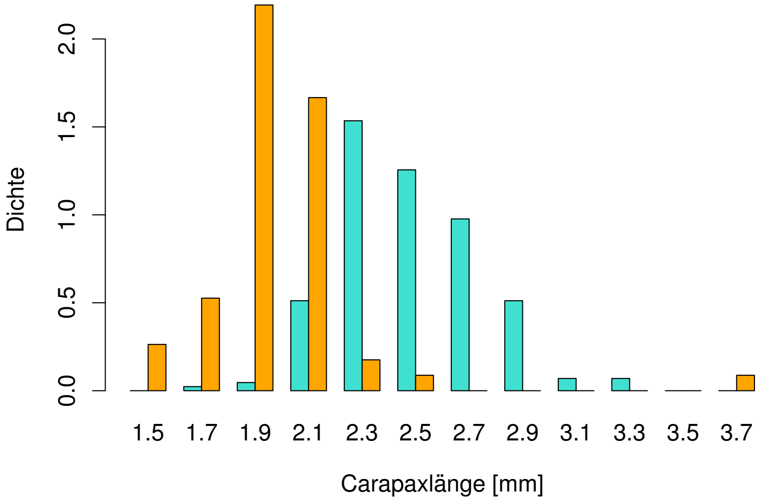
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



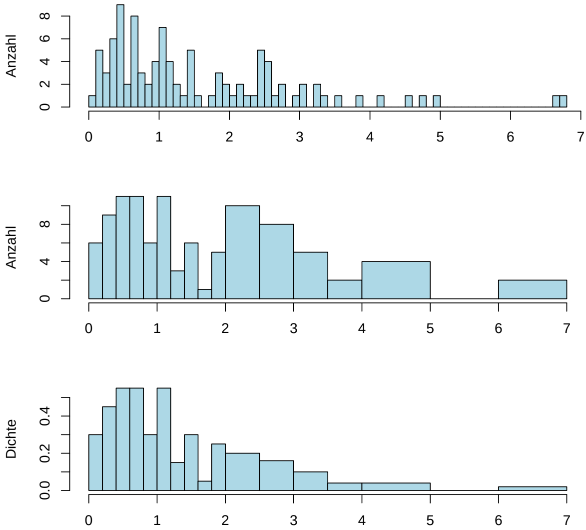
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Anzahl vs. Dichte



Also:

Bei Histogrammen