

Lösung zum 8. Übungsblatt

Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : \left(-\infty, \frac{5}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 3.$$

Gibt es globale Minima bzw. Maxima?

Lösung: Man beachte den Definitionsbereich $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5/4\}$. Schritt 1: Kritische Punkte durch Ableiten:

$$f'(x) = 20x^4 - 20x^3 = 20x^3(x - 1)$$

, die erste Ableitung hat die Nullstellen $x_1 = 0, x_2 = 1$. Beide liegen im Definitionsbereich. 2. Schritt: Zweite Ableitung

$$f''(x) = 80x^3 - 60x^2.$$

Somit ist $f''(0) = 0$ und $f''(1) = 20 > 0$. Somit ist $x_2 = 1$ ein lokales Minimum, und $x_1 = 0$ muss weiter untersucht werden. Wir betrachten das Vorzeichen von $f'(x)$ in einer Umgebung von 0. Da $f'(x) = 20x^3(x - 1)$ ist, gibt es in 0 einen Vorzeichenwechsel von + nach - (für $-1 < x < 0$ ist $f'(x) > 0$, für $0 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$). Somit hat f in 0 ein lokales Maximum. Zuletzt untersuchen wir auf globale Extrema. Es gilt $f(0) = 3, f(1) = 2$. Da $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ist, gibt es kein globales Minimum. Da $f(5/4) = 3 + \frac{5^4}{4^4}$ ist, hat f in $x = 5/4$ ein globales Maximum (Randmaximum).

Aufgabe 2

Der Cholesteringehalt im Blut in Abhängigkeit von der nach Einnahme einer Mahlzeit vergangenen Zeit t (in Stunden) lässt sich durch

$$C(t) = C_0 + \gamma \left(\frac{1}{1 + \beta t} - \frac{1}{1 + \alpha t} \right)$$

für $t \geq 0$ beschreiben; dabei ist C_0 der Cholesterinspiegel vor der Nahrungseinnahme, γ ist eine von der eingenommenen Mahlzeit abhängige Konstante und $\alpha > \beta > 0$ sind durch die Abbaugeschwindigkeit im Magen bzw. in der Leber des Individuums gegebene Konstanten.

- (a) Nimmt der Cholesterinspiegel Extremalwerte an (Maxima und/oder Minima), und wie viel Zeit nach Einnahme der Mahlzeit vergeht bis dahin? Wie sieht der Verlauf des Cholesterinspiegels aus?
- (b) In einem konkreten Fall seien $C_0 = 165 \text{ (mg/100ml)}$, $\gamma = 110$ sowie $\alpha = 0,625$ und $\beta = 0,1$. Nimmt der Cholesterinspiegel Werte von mehr als 200 an?

Lösung: (a) Man sieht $C(0) = C_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$, und $C(t) \geq 0$ für alle t , da nach Voraussetzung $\alpha > \beta > 0$ gilt. Zur Bestimmung möglicher Extrema berechnen wir

$$C'(t) = \gamma \left(\frac{\alpha}{(1 + \alpha t)^2} - \frac{\beta}{(1 + \beta t)^2} \right) = \gamma \frac{\alpha(1 + \beta t)^2 - \beta(1 + \alpha t)^2}{(1 + \alpha t)^2(1 + \beta t)^2}.$$

Diese Funktion hat die Nullstellen $t = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ (Nullstellen des Zählers, der Nenner wird dort nicht gleichzeitig 0). Da t als Zeit nicht negativ sein kann, ist $t = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ der einzige kritische Punkt. Untersuchung des Vorzeichens der Ableitung zeigt, dass es sich um ein lokales Maximum handelt (das Vorzeichen wechselt von positiv zu negativ; alternativ sagt einem das auch der Test mit der zweiten Ableitung).

(b) Wir berechnen den Wert des Maximums, also $C(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})$ für die angegebenen Parameterwerte. Man erhält

$$C_{max} = 165 + 110 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{0.1/0.625}} - \frac{1}{1 + \sqrt{0.625/0.1}} \right) \approx 240 > 200.$$

Es werden also Werte größer als 200 angenommen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ der Funktionen

(a) $(x, y, z) \rightarrow F(x, y, z)$, gegeben durch

$$F(x, y, z) = \frac{x - yz}{x + e^{2z}} - \frac{\cos(xz)}{1 + y^2 + z^2},$$

(b) $(x, y, z) \rightarrow G(x, y, z)$, für $x, y, z > 0$ gegeben durch

$$G(x, y, z) = \ln xy + 2 \ln \frac{z}{\sqrt{xy}} - \ln \frac{zx}{2}.$$

Lösung: (a) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e^{2z} + yz}{(x + e^{2z})^2} + \frac{z \sin(xz)}{1 + y^2 + z^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-z}{x + e^{2z}} + \frac{2y \cos(xz)}{1 + y^2 + z^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-y}{x + e^{2z}} - \frac{(x + yz)2e^{2z}}{(x + e^{2z})^2} + \frac{x \sin(z)}{1 + y^2 + z^2} + \frac{2z \cos(xz)}{(1 + y^2 + z^2)^2}$.

(b) Mehrfache Anwendung der Logarithmengesetze vor (!) dem Ableiten vereinfacht die Funktion zu $G(x, y, z) = \ln z - \ln x + \ln 2$. Somit ist die Ableitung nach x gleich $-1/x$, die Ableitung nach z gleich $1/z$ und die Ableitung nach y gleich 0.