Goethe-Universität Frankfurt WS 2023/24
Fachbereich 12 – Institut für Mathematik Ausgabe: 26.01. 2024
Prof. Dr. Noemi Kurt

11. Übungsblatt mit Lösungen

Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten

Aufgabe 1
Es seien A, B und C drei Ereignisse (etwa $A =$ das Telefon klingelt, $B =$ es regnet, und $C =$ die U-Bahn hat Verspätung). Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Mengenausdrücke und ggf. verbal:

1. nur A tritt ein;
2. sowohl A als auch C, aber nicht B tritt ein;
3. wenigstens eines der Ereignisse tritt ein;
4. alle drei Ereignisse treten ein;
5. keines der Ereignisse tritt ein;
6. höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein;
7. genau zwei der drei Ereignisse treten ein;

Lösung: Zur Erinnerung: $A \cap B$ bedeutet: A und B treten ein (Also: das Telefon klingelt, und es regnet), $A \cup B$ bedeutet A oder B (oder beide) treten ein (also, das Telefon klingelt, oder es regnet, oder beides gleichzeitig), und A^c bedeutet A tritt nicht ein (also: Das Telefon klingelt nicht).
Somit:

1. $A \cap B^c \cap C^c$ (wenn nur A eintritt, dürfen B und C nicht gleichzeitig auch eintreten, es müssen also B^c und C^c eintreten).
2. $A \cap C \cap B^c$
3. $A \cup B \cup C$ (hier können auch zwei der Ereignisse oder auch alle drei eintreten, mindestens aber eines davon)
4. $A \cap B \cap C$
5. $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$
6. $(A \cap B \cap C)^c$ (höchstens zwei bedeutet: Nicht alle drei; es kann keins, eins, oder zwei beliebige eintreten)
7. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Aufgabe 2
Es seien A und B zufällige Ereignisse, und es seien $p = \mathbb{P}(X \in A \cup B)$, $q = \mathbb{P}(X \in A)$ sowie $r = \mathbb{P}(X \in B)$ bekannt. Ermitteln Sie damit

$$(i)\mathbb{P}(X \in A \cap B), \quad (ii)\mathbb{P}(X \in A \cap B^c), \quad (iii)\mathbb{P}(X \in A^c \cap B)$$

$$(iv)\mathbb{P}(X \in A^c \cap B^c), \quad (v)\mathbb{P}(X \in A \cup B^c) \quad (vi)\mathbb{P}(X \in A^c \cup B).$$

(Hinweis: Eine Skizze dürfte hilfreich sein). Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten speziell für $p = 0.65$, $q = 0.3$ und $r = 0.5$ an.

Lösung: Wir erinnern daran, dass aus der Vorlesung bekannt ist, dass stets $\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A \cap B)$ gilt, sowie $\mathbb{P}(X \in A^c) = 1 - \mathbb{P}(X \in A)$.
(i) $\mathbb{P}(X \in A \cap B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A \cup B) = q + r - p$, (aus Formel 1)
(ii) Durch Überlegen (oder Skizze!) und Verwenden von (i) finden wir $\mathbb{P}(X \in A \cap B^c) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in A \cap B) = q - (1 + r - p) = p - r$
(iii) Analog zu (ii) erhält man $\mathbb{P}(X \in A^c \cap B) = p - q$
(iv) Eine Skizze zeigt $\mathbb{P}(X \in A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(X \in (A \cup B)^c) = 1 - p$ (sonst analog wie in (i) vorgehen)
(v) Ebenso gilt $\mathbb{P}(X \in A \cup B^c) = \mathbb{P}(X \in (A^c \cap B)^c) = 1 - p + q$ aus (iii)
(vi) $1 - p + r$
Das Einsetzen der Zahlen sollte keine Probleme bereiten.

Aufgabe 3
Ein Labortest fällt beim Vorliegen einer bestimmten Infektion mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,99$ (99 Prozent) positiv aus. Der Test gibt jedoch bei damit untersuchten gesunden Personen im Mittel bei 3 Prozent ein falsch positives Ergebnis; wenn also eine gesunde Person getestet wird, so zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,03$ an, dass die Person infiziert ist. Bekannt ist ferner, dass $0,5$ Prozent der Bevölkerung infiziert sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person tatsächlich infiziert ist, wenn der Test bei einer Untersuchung dieser Person positiv ausfällt?

Lösung: Wir gehen genauso vor wie in der Vorlesung, und notieren als erstes die Wahrscheinlichkeiten, die im Aufgabentext gegeben sind. Sei $X \in \{\text{krank,gesund}\}$ der Gesundheitsstatus einer zufällig ausgewählten Person, und $Y \in \{\text{positiv, negativ}\}$ das Testergebnis. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$\mathbb{P}(X = \text{krank}) = 0.005$$

$$\mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{krank}) = 0.99$$

$$\mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{gesund}) = 0.03$$

Wir verwenden die Bayes-Formel aus der Vorlesung zur Berechnung von

$$\mathbb{P}(X = \text{krank}|Y = \text{positiv}) = \frac{\mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{krank})\mathbb{P}(X = \text{krank})}{\mathbb{P}(Y = \text{positiv})},$$

wobei

$$\begin{aligned} P(Y = \text{positiv}) =& \mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{krank})\mathbb{P}(X = \text{krank}) + \mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{gesund})\mathbb{P}(X = \text{gesund}) \\ =& 0.99 \cdot 0.005 + 0.03 \cdot (1 - 0.005) = 0.0348 \end{aligned}$$

ist. Setzt man das in die erste Gleichung ein, erhlt man

$$\mathbb{P}(X = \text{krank}|Y = \text{positiv}) = \frac{\mathbb{P}(Y = \text{positiv}|X = \text{krank})\mathbb{P}(X = \text{krank})}{\mathbb{P}(Y = \text{positiv})} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.0348} = 0.1422 = 14,22\%$$